Devoir surveillé n°2

Samedi 19 octobre (8h - 10h)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

La calculatrice est *interdite*.

Problème 1 : marche aléatoire et ruine du joueur

Dans tout ce problème, p est un réel de l'intervalle $]0,1[$, et on pose $q = 1 - p$.

Marche aléatoire dans un intervalle

Soit N un entier strictement positif.

Une particule se déplace sur un axe orienté entre les abscisses 0 et N, en faisant des sauts successifs d'une unité vers la droite ou vers la gauche. Initialement, elle se trouve à une certaine abscisse $n \in [\![0, N]\!]$. Tant qu'elle n'est pas positionnée sur l'une des extrémités 0 ou N de l'intervalle, elle effectue à chaque instant un saut vers la droite avec la probabilité p, ou vers la gauche avec la probabilité q. Les sauts sont supposés indépendants. Si à un moment donné elle se trouve à l'abscisse 0 ou à l'abscisse N, elle arrête ses déplacements.

1. Un exemple.
Dans cette question 1 seulement, on suppose que $p = 1/2$, que $N = 3$, et qu'initialement la particule est à l'abscisse $n = 1$.
Pour tout entier naturel k, on définit les événements suivants :

- A_k : « la particule est à l'abscisse 0 à l'instant k »
- B_k : « la particule est à l'abscisse 1 à l'instant k »
- C_k : « la particule est à l'abscisse 2 à l'instant k »
- D_k : « la particule est à l'abscisse 3 à l'instant k »

(a) Établir, pour tout entier naturel k, les égalités :

$$\begin{cases} a_{k+1} &= a_k + \frac{1}{2} b_k \\ b_{k+1} &= \frac{1}{2} c_k \\ c_{k+1} &= \frac{1}{2} b_k \\ d_{k+1} &= d_k + \frac{1}{2} c_k \end{cases}$$

(b) Montrer que la suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
Justifier que $b_0 = 1$ et $b_1 = 0$ et en déduire une expression de b_k en fonction de k.

Pour tout entier k, on pose Z_k l'événement : « la particule se trouve à l'instant k à l'abscisse 0 pour la première fois ».

(c) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $A_k = Z_k \cup A_{k-1}$.
En déduire : $P(Z_k) = \dfrac{1}{2} b_{k-1}$.

(d) Soit Z l'événement « la particule termine ses déplacements à l'abscisse 0 ».
Montrer que $P(Z) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_{k-1}$ et conclure que $P(Z) = \dfrac{2}{3}$.

On revient maintenant au cas général : p est un réel de $]0,1[$ et N est un entier naturel non nul.

Pour $n \in [\![0, N]\!]$, on note R_n l'événement « la particule termine ses déplacements à l'abscisse 0 en partant initialement de l'abscisse n », et on note r_n la probabilité de R_n.

2. (a) Justifier que $r_0 = 1$ et $r_N = 0$.

(b) Soit D (respectivement G) l'événement : « le premier déplacement de la particule s'effectue vers la droite (resp. vers la gauche) ».
Justifier que pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, $P_D(R_n) = r_{n+1}$ et donner une formule analogue pour $P_G(R_n)$.

(c) Établir : pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, $\quad r_n = p r_{n+1} + q r_{n-1}$.

(d) Montrer finalement que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$: $r_n = \begin{cases} \dfrac{q^N - q^n p^{N-n}}{q^N - p^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{N-n}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$

3. On pose s_n la probabilité que la particule termine ses déplacements à l'abscisse N en partant de l'abscisse n.

Justifier, par un argument de symétrie, que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$: $s_n = \begin{cases} \dfrac{p^N - p^{N-n} q^n}{p^N - q^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{n}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$

4. Quelle est la probabilité que la particule n'arrête jamais de se déplacer en partant initialement de l'abscisse $n \in [\![0, N]\!]$?

Ruine du joueur

Soit a et b deux entiers naturels qui ne sont pas tous les deux nuls.

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec une pièce dont la probabilité de faire pile vaut p et dont les lancers sont supposés indépendants. Le joueur A mise sur pile et le joueur B mise sur face. Au début du jeu le joueur A possède a euros et le joueur B possède b euros. À chaque lancer donnant pile, le joueur B donne un euro à A, s'il lui reste de l'argent. À chaque lancer donnant face, c'est le joueur A qui donne, s'il le peut, un euro à B. Quand l'un des deux joueurs n'a plus d'argent, on dit qu'il est ruiné et le jeu s'arrête. On définit l'événement R_A : « le jeu se termine suite à la ruine du joueur A ».

5. Expliquer comment ramener ce problème au modèle précédent de la marche aléatoire dans un intervalle.
6. En déduire que la probabilité que le joueur A soit ruiné est donnée par

$$P(R_A) = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^b}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}} & \text{si } p \neq 1/2 \\ \dfrac{1}{\frac{a}{b}+1} & \text{si } p = 1/2 \end{cases}$$

7. Application : au casino, on joue de façon répétée à un jeu dans lequel on a la probabilité $p \leqslant 1/2$ de gagner un euro, et la probabilité q de perdre un euro.
   Pourquoi est-il très probable que l'on finira par perdre tout son argent ?

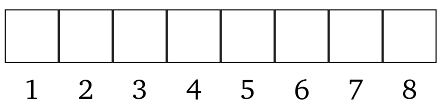
Problème 2 : distanciation sociale dans une salle de spectacle

8. Question préliminaire : *formule de l'espérance totale*
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle d'entiers $[\![1, N]\!]$ avec $N \geqslant 1$.
   Pour tout événement A, on appelle loi conditionnelle de X sachant A la loi de probabilité donnée par les nombres $P_A(X = k)$, $k \in [\![1, N]\!]$.
   L'espérance de cette loi est appelée *espérance conditionnelle de X sachant A*, et est notée $E_A(X)$.
   On a ainsi : $E_A(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k\, P_A(X = k)$.
   Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ un système complet d'événements.
   Montrer l'égalité suivante, appelée formule de l'espérance totale :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} E_{A_i}(X)\ P(A_i)$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

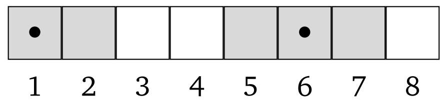
On considère une salle de spectacle comportant des rangées de sièges. Une rangée donnée comporte n sièges, numérotés de 1 à n. Par exemple si $n = 8$ on peut la représenter ainsi :



En raison d'une crise sanitaire liée à une épidémie, le gouvernement impose des règles de « distanciation sociale », et notamment il demande que dans les salles les spectateurs laissent au moins un siège libre de part et d'autre de leur place.

Le premier spectateur arrive et choisit, avec équiprobabilité, l'une des n places libres. Puis chaque spectateur suivant choisit, avec équiprobabilité, l'une des places libres qui respectent la consigne, c'est-à-dire non voisines d'un spectateur déjà assis.

Par exemple si la rangée et de longueur 8 et que les places 1 et 6 sont occupées par les deux premiers spectateurs déjà installés, alors le troisième spectateur choisit sa place avec équiprobabilité entre les sièges 3, 4 et 8.



On définit la variable aléatoire X_n égale au nombre de spectateurs assis lorsqu'il ne reste plus de siège disponible dans la rangée de longueur n. On note x_n l'espérance de X_n.

On pose par convention $x_n = 0$ si $n \leqslant 0$.

9. Des cas particuliers

(a) Établir que $x_1 = x_2 = 1$.

(b) Donner la loi de X_3 puis vérifier que $x_3 = \dfrac{5}{3}$.

(c) Montrer que $x_4 = 2$.

On revient au cas général, n étant un entier quelconque non nul. On propose dans la suite d'établir une formule donnant x_n.

10. (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « le premier spectateur choisit le siège numéro i ». Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![3, n-2]\!]$: $E_{A_i}(X_n) = 1 + x_{i-2} + x_{n-i-1}$.
On attend un argument probabiliste, en regardant le nombre de places restantes de part et d'autre du premier spectateur installé. On pourra au besoin illustrer la situation.

(b) Montrer que l'expression précédente de $E_{A_i}(X_n)$ est encore valable pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

(c) En utilisant la formule de l'espérance totale (voir question préliminaire), établir :

$$x_n = 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-2} x_k$$

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)x_{n+2} - (n+1)x_{n+1} = 2x_n + 1$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = x_{n+1} - x_n$ et $\beta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$.

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+3)\alpha_{n+2} - (n+1)\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$.
En déduire : $\beta_{n+1} = -\dfrac{2}{n+3}\beta_n$.

(f) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \dfrac{(-2)^{n+1}}{(n+2)!}$, puis que $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-2)^{k+1}}{(k+2)!}$.

(g) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)(-2)^k}{(k+1)!}$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = E\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$, que l'on appelle le *taux moyen d'occupation* de la rangée.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2}}{2}$.

12. On remarque que cette limite est comprise entre $1/3$ et $1/2$. Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?