DS N°6 : CORRECTION

Exercice

1.
- E est inclus dans $\mathbb{R}_4[X]$.
- Le polynôme nul est dans E, donc E est non vide.
- Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda P + Q$ est dans $\mathbb{R}_4[X]$ et

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0 \text{ et } (\lambda P + Q)(4) = \lambda P(4) + Q(4) = 0.$$

Donc $\lambda P + Q \in E$

$\boxed{\text{Donc } E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].}$

2.
- Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\phi(\lambda P + Q) = W(\lambda P + Q) = \lambda WP + WQ = \lambda\phi(P) + \phi(Q)$.
  Donc ϕ est une application linéaire.
- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg \phi(P) = \deg P + \deg W \leqslant 4$ et donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_4[X]$.
  De plus,

$$\phi(P)(0) = W(0)P(0) = 0 \text{ et } \phi(P)(4) = W(4)P(4) = 0$$

Ainsi $\phi(P) \in E$.

$\boxed{\text{Donc } \phi \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}_2[X] \text{ dans } E.}$

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in \mathrm{Ker}\,(\phi) \iff WP = 0 \iff P = 0 \quad \text{car W n'est pas le polynôme nul}$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(\phi) = \{0\}$. Ceci prouve donc que ϕ est <u>injective</u>.

- Soit $P \in E$. Alors $P(0) = P(4) = 0$. Ainsi P admet deux racines distinctes.
  Donc il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que $P = X(X-4)Q = WQ = \phi(Q)$.
  Donc $P \in \mathrm{Im}\,(\phi)$. D'où $E \subset \mathrm{Im}\,(\phi)$.
  De plus, $\mathrm{Im}\,(\phi) \subset E$ car $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to E$.
  Donc $\mathrm{Im}\,(\phi) = E$.
  Ainsi ϕ est <u>surjective</u>.

$\boxed{\text{Donc } \phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } E.}$

3. De l'isomorphisme précédent, on déduit d'après le cours que :
- l'image par ϕ de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est une base de E.
  Ainsi $\boxed{(W, WX, WX^2) \text{ est une base de } E.}$
- E est de même dimension que $\mathbb{R}_2[X]$ et donc $\boxed{\dim E = 3}$

4. a)
- Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg Q(X+1) = \deg Q$ donc $Q(X+1) \in \mathbb{R}_2[X]$.
  Ainsi par combinaison linéaire, $\Delta(Q) \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X)\\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X)\\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q).\end{aligned}$$

$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$

b) $\Delta(1) = (1-1) = 0$, $\Delta(X) = X + 1 - X = 1$ et $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.
On obtient la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c)
- $\mathrm{Ker}\,(\Delta) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \Delta(P) = 0\}$.

  Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathrm{Ker}\,(\Delta)$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

$$\Delta(P) = 0 \iff MX = 0 \iff \begin{cases} b + a &= 0 \\ 2a &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

  Donc $P = c$ et $\mathrm{Ker}\,(\Delta) = \mathrm{Vect}\,(1)$.
  (1) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}\,(\Delta)$.
  Or $1 \neq 0$, donc (1) est libre. Ainsi $\boxed{(1) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,(\Delta).}$

- En utilisant la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on sait que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(\phi) &= \mathrm{Vect}\,(\Delta(1), \Delta(X), \Delta(X^2))\\ &= \mathrm{Vect}\,(0, 1, 2X+1) = \mathrm{Vect}\,(1, 2X+1)\end{aligned}$$

  $(1, 2X+1)$ est alors une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(\Delta)$.
  $(1, 2X+1)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts, donc $(1, 2X+1)$ est libre.
  D'où $\boxed{(1, 2X+1) \text{ une base de } \mathrm{Im}\,(\Delta).}$

On aurait pu remarquer que $\mathrm{Im}\,(\Delta) = \mathrm{Vect}\,(1, 2X+1) = \mathrm{Vect}\,(1, 2X) = \mathrm{Vect}\,(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$ et $(1, X)$ est aussi une base de $\mathrm{Im}\,(\Delta)$.

d) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice M^3 représente l'endomorphisme Δ^3 dans la base canonique.

Donc $\boxed{\Delta^3 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0.}$

5. a) Comme $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, on a :

$$f^3 = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$$
$$= \phi \circ \Delta^3 \circ \phi^{-1} = \boxed{0.}$$

b) • $\mathrm{Ker}\,(f) = \{P \in E \mid f(P) = 0\}$

Soir $P \in \mathrm{Ker}\,(f)$.

Comme ϕ est bijectif , alors : $f(P) = 0 \Leftrightarrow \Delta \circ \phi^{-1}(P) = \phi^{-1}(0) = 0$

$$\Leftrightarrow \phi^{-1}(P) \in \mathrm{Ker}\,(\Delta)$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \phi^{-1}(P) = \lambda.1$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/P = \lambda\phi(1) = \lambda W.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{\lambda W, \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(W)$. Or $W \neq 0$ donc (W) est libre.

$\boxed{\text{Donc } (W) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,(f)}$

• D'après la question **3.**, (W, WX, WX^2) est une base de E.

Donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(W), f(WX), f(WX^2))$.

On sait que $f(W) = 0$ car W est dans $\mathrm{Ker}\,(f)$.

On sait aussi que $\phi(X) = W$ et $\phi(X^2) = WX^2$ donc $\phi^{-1}(W) = X$ et $\phi^{-1}(WX^2) = X^2$.

Donc $f(WX) = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}(WX)$
$$= \phi(\Delta(X)) = \phi(1) = W$$
$$f(WX^2) = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}(WX^2)$$
$$= \phi(\Delta(X^2)) = \phi(2X+1) = 2\phi(X) + 1 = 2WX + 1.$$

Donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(W, 2WX+1)$ et $(W, 2WX+1)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(f) = 3 - 1 = 2$.

Comme $(W, 2WX+1)$ est de cardinal $2 = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$, alors

$\boxed{(W, 2WX+1) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$

c) Soit λ une valeur propre de f et P un vecteur propre associé.

Alors $f^3(P) = 0$ car $f^3 = 0$.

$f^2(P) = f(\lambda P) = \lambda f(P) = \lambda^2 P$

donc $f^3(P) = f(f^2(P)) = f(\lambda^2 P) = \lambda^2 f(P) = \lambda^3 P$

Ainsi $\lambda^3 P = 0$.

Comme P est un vecteur propre pour f, alors $P \neq 0$. Donc $\lambda^3 = 0$.

D'où $\lambda = 0$ et la seule valeur propre possible pour f est 0.

Comme nous avons déjà prouvé que $\dim \mathrm{Ker} f \geqslant 1$, et donc 0 est bien une valeur propre de f.

$\boxed{\text{Donc } 0 \text{ est la seule valeur propre de } f}$

d) 0 est l'unique valeur propre de f et son SEP associé est $E_0(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$ de base W et de dimension égale à 1.

On a $\dim E_0(f) < \dim E$, donc $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Problème

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques-Illustrations

1. a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!], \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!], \sum_{j=1}^{p} ((A)_{i,j} \times 1) = 1 \end{cases}$$

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!], \sum_{j=1}^{p} ((A)_{i,j} (V)_{j,1}) = (V)_{i,1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V \end{cases}$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V \end{cases}}$$

b) Soit A un élément de $\mathcal{ST}_p$. V n'est pas la colonne nulle et $AV = V$.

Donc 1 est valeur propre de A et V en est un vecteur propre associé.

$\boxed{\text{Donc } 1 \text{ est une valeur propre commune à toutes les matrices de } \mathcal{ST}_p.}$

2. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in \text{Sp}(A_1) \iff \text{rg}(A_1 - \lambda I_3) < 3$

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A_1 - \lambda I_3) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4-\lambda & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-4\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}\right) && \begin{matrix} L_2 \leftarrow 4L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{matrix} \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 3-4\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_3 \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 3-4\lambda & 1 \end{pmatrix}\right) && \text{permutation des lignes} \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \alpha(\lambda) \end{pmatrix}\right) && L_3 \leftarrow L_3 - (3-4\lambda)L_1
\end{aligned}$$

avec $\alpha(\lambda) = 1 + \lambda(3-4\lambda) = 1 + 3\lambda - 4\lambda^2 = (\lambda - 1)(-4\lambda - 1)$

Donc $\lambda \in \text{Sp}(A_1) \iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = -\dfrac{1}{4}$.

Donc $\text{Sp}(A_1) = \left\{0, 1, -\dfrac{1}{4}\right\}$

Ainsi A_1 est d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes , donc A_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la dimension de chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Donc $\dim(E_1(A_1)) = 1$.

b) i. A_3 est une matrice $\mathcal{ST}_3$ car :

- ses coefficients sont positifs ou nuls.
- $A_3 V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$

De plus, A_3 est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi $\text{Sp}(A_3) = \left\{1, \dfrac{1}{2}\right\}$.

$$\text{rg}(A_3 - I_3) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\right) = 2$$

Donc $\dim(E_1(A_3)) = 3 - \text{rg}(A_3 - I_3) = 3 - 2 = 1$

$$\text{rg}(A_3 - \frac{1}{2}I_3) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2.$$

Donc $\dim(E_{-1/2}(A_3)) = 3 - \text{rg}(A_3 - 1/2 I_3) = 3 - 2 = 1$

Ainsi $\dim(E_1(A_3)) + \dim(E_{-1/2}(A_3)) = 2 \neq 3$.

D'où A_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Ainsi,

$\boxed{\text{il existe au moins un élément non diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), \text{ par exemple } A_3.}$

ii. - Les coefficients de A_2 sont des réels positifs ou nuls.
- $A_2 V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$

Donc A_2 est un élément de $\mathcal{ST}_3$. 1 est donc valeur propre de A_2.

$$\text{rg}(A_2 - I_3) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

Donc $\dim(E_1(A_2)) = 3 - \text{rg}(A_2 - I_3) = 3 - 1 = 2$

Ainsi l'affirmation "Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1" est fausse.

3. Soient $A \in \mathcal{ST}_p$, $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé λ.

On note i un élément de $\{1, .., p\}$ tel que $\forall k \in \{1, .., p\}, |x_k| \leqslant |x_i|$

a) $AX = \lambda X$ donc $\forall k \in [\![1, p]\!], (AX)_{k,1} = \lambda(X)_{k,1}$.

En particulier $(AX)_{i,1} = \lambda(X)_{i,1} = \lambda x_i$.

Alors : $|\lambda|\,|x_i| = |\lambda x_i| = |(AX)_{i,1}|$.

$|(AX)_{i,1}| = \left|\sum\limits_{j=1}^{p} (A)_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} |(A)_{i,j} x_j| = \sum\limits_{j=1}^{p} |(A)_{i,j}|\,|x_j| = \sum\limits_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\,|x_j|$ (les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls).

Or $\forall j \in [\![1, p]\!], |x_j| \leqslant |x_i|$ et $(A)_{i,j} \geqslant 0$.

Donc : $|\lambda|\,|x_i| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\,|x_i| = |x_i| \sum\limits_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = |x_i| \times 1 = |x_i|$.

Donc $\boxed{|\lambda x_i| \leqslant |x_i|}$

b) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \neq 0$ donc $|x_i|$ n'est pas nul car $|x_i|$ est le plus grand module des coordonnées de X.
Alors $|\lambda|\,|x_i| = |\lambda x_i| \leqslant |x_i|$ et $|x_i| > 0$.
Donc on obtient : $|\lambda| \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres dans } \mathbb{C} \text{ des éléments de } \mathcal{ST}_p \text{ ont un module inférieur ou égal à 1.}}$

Partie II : Suites moyennes de puissances de matrices stochastiques

4. Soit A, B deux matrices de $\mathcal{ST}_p$.

- Soient i et j deux éléments de $[\![1, p]\!]$.
  $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} (A)_{i,k}(B)_{k,j}$.
  Or $\forall k \in [1, p], (A)_{i,k} \geqslant 0$ et $(B)_{k,j} \geqslant 0$ car A et B sont des éléments de $\mathcal{ST}_p$.
  Donc $\forall k \in [\![1, p]\!], (A)_{i,k}(B)_{k,j} \geqslant 0$.
  Ainsi $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} ((A)_{i,k}(B)_{k,j}) \geqslant 0$, et ceci est vrai pour tout (i, j) dans $[\![1, p]\!]^2$.
- $AV = V$ et $BV = V$ car A et B sont des éléments de $\mathcal{ST}_p$,
  donc $(AB)V = A(BV) = AV = V$.

Donc $\boxed{\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, AB \in \mathcal{ST}_p.}$

5. a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: « $A^n \in \mathcal{ST}_p$ » est vraie.

- $n = 0$. $A^0 = I_p$ est une matrice stochastique car ses coefficients sont tous positifs et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.
  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  A^n et A sont des matrices stochastiques. Donc d'après la question précédente, leur produit, $A^n \times A = A^{n+1}$, est aussi une matrice stochastique.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, A^k appartient à $\mathcal{ST}_p$.
  Donc pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, A^k est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls.
  Alors $\sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k$ est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls.
  Donc il en est de même pour $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k$.
- Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, A^k appartient à $\mathcal{ST}_p$.
  Donc pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $A^k V = V$. Alors :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) V = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(A^k V\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V = \frac{1}{n}(nV) = V.$$

Donc $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k$ appartient à $\mathcal{ST}_p$. Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p.}$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
$\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} n & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$
Donc $d_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{n}\frac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$

- si $x = 1$, $\lim_{n\to+\infty} d_n(x) = 1$.
- si $x \neq 1$. Alors $x \in [-1, 1[$, donc $|x| \leqslant 1$.

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right| = \frac{1}{n}\frac{|1-x^n|}{1-x} \leqslant \frac{1}{n}\frac{1+|x|^n}{1-x} \leqslant \frac{1}{n}\frac{1+1}{1-x} = \frac{1}{n}\frac{2}{1-x}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{2}{1-x}\right) = 0$, il vient par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(x) = 0$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x| \leqslant 1 : d_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \neq 1 \end{cases}}$

7. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & & \mu_{r+1} & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \mu_p \end{pmatrix}$

Donc $D^0 = I_p$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & & \mu_{r+1}^k & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \mu_p^k \end{pmatrix}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & n & & & \\ \vdots & & & \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{r+1}^k & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{n-1} \mu_p^k \end{pmatrix}$

$M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & & d_n(\mu_{r+1}) & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_n(\mu_p) \end{pmatrix}$

- Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$,

✓ si $i \neq j$, alors $(M_n)_{i,j} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = (\Delta)_{i,j}$

✓ si $i = j$ et $i \leqslant r$, $(M_n)_{i,i} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = (\Delta)_{i,i}$

✓ si $i = j$ et $i \geqslant r+1$, $(M_n)_{i,i} = d_n(\mu_i)$
Or les μ_i sont des valeurs propres réelles de A distincts de 1 et d'après la question 3.b), $|\mu_i| \leqslant 1$.
Donc d'après 6. , $(M_n)_{i,i} = d_n(\mu_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = (\Delta)_{i,i}$.

Ainsi Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $(M_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\Delta)_{i,j}$.

Donc $\boxed{M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta.}$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = PM_nP^{-1}$. Posons $U_n = P$ et $V_n = P^{-1}$.

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers P et la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers P^{-1}.

Comme $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta$, alors d'après les résultats admis dans l'énoncé,
$PM_n = U_nM_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Delta$, puis $PM_nP^{-1} = U_nM_nV_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Delta P^{-1} = B$.
Donc $\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B.}$

8. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $A = PDP^{-1}$ d'après l'énoncé. Donc A et D sont semblables. Ainsi elles représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, A^k et D^k représentent f^k dans les mêmes bases, donc $A^k = PD^kP^{-1}$.

$$B_n = PM_nP^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} PD^kP^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

Or $A \in \mathcal{ST}_p$, donc d'après 5.b), $B_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \in \mathcal{ST}_p.}$

b) B est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $B_{i,j} = \lim\limits_{n\to+\infty} (B_n)_{i,j}$.

De plus pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, B_n appartient à $\mathcal{ST}_p$.

- $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, (B_n)_{i,j} \geqslant 0$.
  En passant à la limite, il vient : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, B_{i,j} \geqslant 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_nV = V$ donc $B_nV \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} V$.
  Or d'après les résultats admis par l'énoncé, $B_nV \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} BV$. Donc par unicité de la limite, $BV = V$.

Donc $\boxed{B \in \mathcal{ST}_p}$

Partie III : Aspect probabiliste

9. • Pour tout (i, j) dans $[\![1, 3]\!]^2$, $A_{i,j}$ est une probabilité donc $A_{i,j}$ est un réel positif ou nul.
• Soit i dans $[\![1, 3]\!]$.
$P_{(X_0=i)}$ est une probabilité et $((X_1 = j))_{j\in[1,3]}$ est un système complet d'événements.

Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} P_{(X_0=i)}(X_1 = j) = P_{(X_0=i)}\left(\bigcup_{j=1}^{3} (X_1 = j)\right) = P_{(X_0=i)}(\Omega) = 1$.

Donc $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{i,j} = 1$.

Donc $\boxed{A \in \mathcal{ST}_3.}$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1,3]\!]$.
$((X_n = i))_{i\in[\![1,3]\!]}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, il vient que :
$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^{3} P(X_n = i)\, P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$.
Or $\forall i \in [\![1,3]\!], P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = P_{(X_0=i)}(X_1 = j) = A_{i,j}$.
Alors : $(L_{n+1})_{1,j} = P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^{3} P(X_n = i)\, A_{i,j} = \sum_{i=1}^{3} (L_n)_{1,i}\, A_{i,j}$.
Finalement $\forall j \in [\![1,3]\!], (L_{n+1})_{1,j} = \sum_{i=1}^{3} (L_n)_{1,i}\, A_{i,j}$.
Donc $L_{n+1} = L_n A$. Ainsi $\boxed{\forall \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = L_n A.}$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: « $L_n = L_0 A^n$ » est vraie.

- $n = 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $A^0 = I_3$ et $L_0 A^0 = L_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  $L_{n+1} = L_n A = (L_0 A^n)\, A = L_0 A^{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0 A^n.}$$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Donc $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$
A admet 3 valeurs propres distinctes et A est d'ordre 3, donc A est diagonalisable et chaque sous-espaces propres est de dimension 1.

Recherchons une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres pour A :

- On sait que A est stochastique, donc $AV = V$, ainsi $V \in E_1(A)$
  Or $V \neq 0$, donc (V) est libre.
  (V) est de cardinal 1, la dimension de $E_1(A)$ donc (V) est une base de $E_1(A)$.
- On remarque que $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  Donc $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{1/3}(A)$. Or $W \neq 0$, donc (W) est libre.
  (W) est de cardinal 1, la dimension de $E_{\frac{1}{3}}(A)$, donc (W) est une base de $E_{\frac{1}{3}}(A)$.
- $E_{1/2}(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \frac{1}{2}X\right\}$.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  $$AX = \frac{1}{2}X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1/2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
  $$\iff \begin{cases} x = (1/2)x \\ (1/2)x + (1/2)y = (1/2)y \\ (1/3)x + (1/3)y + (1/3)z = (1/2)z \end{cases}$$
  $$\iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 + (1/2)y = (1/2)y \\ 0 + (1/3)y + (1/3)z = (1/2)z \end{cases}$$
  $$\iff \begin{cases} x = 0 \\ (1/3)y = (1/6)z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}$$
  Donc $E_{1/2}(A) = \mathrm{Vect}(U)$ avec $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
  (U) est une famille génératrice de $E_{1/2}(A)$ de cardinal 1, la dimension de $E_{1/2}(A)$. Donc (U) est une base de $E_{1/2}(A)$.

(V, U, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour A. On a donc la relation :
$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, donnée par l'énoncé et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à (V, U, W), c'est à dire : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et ses éléments diagonaux valent tous 1.

Calculons P^{-1} :

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ tels que $PX = X'$.

$$PX = X' \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = x' \\ x + y = y' \\ x + 2y + z = z' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = x' \\ y = -x + y' = -x' + y' \\ z = -x - 2y + z' = -x' - 2\left(-x' + y'\right) + z' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = x' \\ y = -x' + y' \\ z = x' - 2y' + z' \end{cases}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

12. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

En calculant les limites de chaque coefficient de D^n, en utilisant le fait que $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont dans $]-1,1[$, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$. Notons $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que $A = PDP^{-1}$. En utilisant les mêmes arguments qu'à la question 8., on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $P\Delta P^{-1}$.

$$P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\boxed{A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

13. $\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = L_0 A^n$. Comme $A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors d'après les résultats admis par l'énoncé, $L_0 A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \left(P\left(X_0 = 1\right) P\left(X_0 = 2\right) P\left(X_0 = 3\right)\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P\left(X_0 = 1\right) + P\left(X_0 = 2\right) + P\left(X_0 = 3\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (L_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 3) = 0$.

Donc la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi certaine égale à 1, c'est à dire que peu importe la loi de X_0, l'objet se retrouve presque sûrement dans l'urne 1 au bout d'un certain temps .