DS N°6

Durée de l'épreuve : 2h.

La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de l'évaluation des copies. La calculatrice est interdite.
Le sujet comporte 4 pages.

Exercice

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré au plus k.
On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\phi(Q) = W.Q$.

2. Montrer que l'application $\phi \ : \ Q \longmapsto W.Q$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E.

3. En déduire une base et la dimension de E.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme

$$\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X).$$

4. a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Ecrire la matrice de Δ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Déterminer le noyau et l'image de Δ. En donner une base pour chacun des deux sous-espaces.

d) Etablir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} est l'application réciproque de ϕ.

5. a) Montrer que $f \circ f \circ f = 0$.

b) Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

c) Soit λ une valeur propre de f. Montrer que $\lambda^3 = 0$.
En déduire que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.

d) Est-ce que f est diagonalisable ?

Problème

- p désigne un entier naturel supérieur à 3.
- On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients réels, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, I_p la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
- On note, pour toute matrice A carrée d'ordre p et pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la ligne i et la colonne j.
- On appelle **matrice stochastique** toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1 \end{cases}$$ (La somme des coefficients de la ligne i vaut 1.)

et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques-Illustrations

1. a) On note V la matrice colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer, pour toute $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{ST}_p \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V \end{cases}$

b) En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.

2. On note $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

a) Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.

b) En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

i. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$;

ii. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : "Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1".

3. Soient $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

On note i un élément de $\{1,..,p\}$ tel que $\forall k \in \{1,..p\}, |x_k| \leqslant |x_i|$

a) Montrer : $|\lambda x_i| \leqslant |x_i|$

b) En déduire : $|\lambda| \leqslant 1$

Partie II : Suites moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit m, k deux entiers naturels non nuls. Quelques définitions et notations :

- On note, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,k]\!]$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la ligne i et la colonne j.
- On dit qu'une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R})$ et on note $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$, si et seulement si :
  pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,k]\!]$, $(A_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}$.
- Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On admet les résultats suivants si la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R})$ et si la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice B de $\mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R})$, alors $(A_nB_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices converge vers la matrice AB.
  On a alors les deux cas particuliers suivants :
  ✓ si L est une matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R})$, alors la suite $(LA_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices converge vers la matrice LA.
  ✓ si C est une matrice colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, alors la suite $(A_nC)_{n\geqslant 1}$ de matrices converge vers la matrice AC.

On rappelle que p est un entier naturel supérieur à 3.

4. Démontrer que $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, AB \in \mathcal{ST}_p$.

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = I_p$

5. a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n \in \mathcal{ST}_p$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de cette partie II, on suppose que A est diagonalisable et qu'il existe $r \in \{1,..,p-1\}$, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et distincts de 1 si $i \geqslant r+1$, notés $\mu_{r+1}, \cdots, \mu_p$ tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$

On note Δ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k$.

6. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant 1$: $d_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$

7. Calculer la matrice M_n en fonction de $d_n(\mu_i)$ pour $i \geqslant r+1$, puis montrer que $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta$ et en déduire : $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$.

8. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \in \mathcal{ST}_p$

b) En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées $1, 2$ et 3.
A chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), T est dans une des trois urnes et une seule.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se

trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$:
$L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.
On suppose connues la loi de X_0 et la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2,\ (A)_{i,j} = P_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

On suppose : $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$, $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = P_{(X_0=i)}(X_1 = j)$.

9. Montrer : $\quad A \in \mathcal{ST}_3$.

10. Montrer : $\forall \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = L_n A$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 A^n$.

On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la partie I.3, et on note $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

11. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à cœfficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et calculer P_1^{-1}.

12. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n\geq 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n\geq 1}$.

13. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n\geq 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.