TD N°1B : ETUDES DES SUITES RÉCURRENTES

5 Correction :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)^2$ et (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

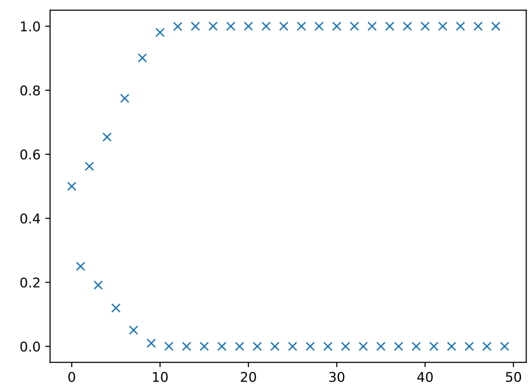
1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: « $u_n \in [0,1]$ » est vraie.

- Initialisation $n = 0$: $u_0 = \frac{1}{2} \in [0,1]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  D'après $\mathcal{P}(n)$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant -u_n \leqslant 0$.
  Ainsi $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$ et finalement $0 \leqslant (1-u_n)^2 \leqslant 1$.
  D'où $u_{n+1} \in [0,1]$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}}$

2)
```python
import matplotlib.pyplot as plt
def trace5(n):
    Abs = [k for k in range(n)]
    Ord = [1/2]
    for k in range(n-1):
        Ord.append((1-Ord[-1])**2)
    plt.plot(Abs,Ord,'x')
    plt.show()
```

En utilisant l'instruction `trace(50)`, on obtient le graphique suivant :



On observe que la suite des termes paires est croissante et converge vers 1, la suite des termes impaires est décroissante et converge vers 0. Les deux suites ne convergent pas vers la même limite.
Donc la suite (u_n) diverge.

3) On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$.
Ainsi on a la relation $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n)$.
On étudie les variations de $f \circ f$, elles serviront pour les questions 3) et 4). On remarque que f est dérivable sur $[0,1]$ et que $f'(x) = -2(1-x) \leqslant 0$.
Donc f est décroissante sur $[0,1]$.
Ainsi $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: « $v_n \leqslant v_{n+1}$ » est vraie.

- Initialisation $n = 0$: $v_0 = u_0 = \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$, $u_1 = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.
  $v_1 = u_2 = f(u_1) = (1 - \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{16}$
  Donc $v_0 \leqslant v_1$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  D'après $\mathcal{P}(n)$, $v_n \leqslant v_{n+1}$.
  Or $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$, donc $\underbrace{f \circ f(v_n)}_{v_{n+1}} \leqslant \underbrace{f \circ f(v_{n+1})}_{v_{n+2}}$.
  Ainsi $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}}$

D'où la suite (v_n) est croissante.
De plus, (v_n) est majorée par 1. Donc d'après le théorème de limite monotone, (v_n) converge.

4) On définit la suite (w_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{2n+1}$.
Ainsi on a la relation $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f \circ f(w_n)$.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: « $w_{n+1} \leqslant w_n$ » est vraie.

- Initialisation $n = 0$: $w_0 = u_1 = \dfrac{1}{4} = \dfrac{64}{256}$, $u_2 = \dfrac{9}{16}$.
  $w_1 = u_3 = f(u_2) = (1 - \dfrac{9}{16})^2 = \dfrac{49}{256}$
  Donc $w_1 \leqslant w_0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  D'après $\mathcal{P}(n)$, $w_{n+1} \leqslant w_n$.
  Or $f \circ f$ est croissante sur $[0, 1]$, donc $\underbrace{f \circ f(w_{n+1})}_{w_{n+2}} \leqslant \underbrace{f \circ f(w_n)}_{w_{n+1}}$.
  Ainsi $w_{n+2} \leqslant w_{n+1}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}}$
D'où la suite (w_n) est décroissante.
De plus, (w_n) est minorée par 0. Donc d'après le théorème de limite monotone, (w_n) converge.

5) On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell'$.

- (v_n) est croissante, donc elle est minorée par son premier terme, c'est à dire que $v_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

D'où $\ell \geqslant \dfrac{1}{2}$.

- (w_n) est décroissante, donc elle est majorée par son premier terme, c'est à dire que $w_n \leqslant \dfrac{1}{4}$.

D'où $\ell' \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Ainsi $\ell \neq \ell'$.
La suite des termes paires et la suite des termes impaires ne convergent pas vers la même limite.
D'où $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ diverge.}}$
Conclure sur la suite (u_n).