TD N°2 : INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

TECHNIQUES DE CALCULS

1 **(Calcul direct d'intégrale avec les primitives usuelles)**
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \min(\frac{1}{3}, t)\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin p}{\cos^2(p)}\mathrm{d}p$ d) $\displaystyle\int_0^2 (1-|v-\frac{1}{2}|)\,\mathrm{d}v$

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_1^x \frac{(\ln(t))^n}{t}\,\mathrm{d}t$ $(n \in \mathbb{N}, x > 0)$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3+\theta^2}\mathrm{d}\theta$ h) $\displaystyle\int_0^1 (4u+4)\,\mathrm{e}^{u^2+2u}\,\mathrm{d}u$

2 **(Intégrations par parties)**
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan(t)\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^x \ln(t+\sqrt{t^2+1})\,\mathrm{d}t$ d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\cos(4t)\,\mathrm{d}t$.

3 **(Changements de variables)**
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{6}-1} \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t)+\tan^3(t))\,\mathrm{d}t$ (poser $u=\tan(t)$)

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+2\,\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ $(u=\mathrm{e}^t)$ e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

4 **(Sommes de Riemann)**

1. Rappeler le théorème sur les sommes de Riemann. Que peut-on approcher ?

2. Calculer les limites des suites suivantes.

a) $v_n = \dfrac{\pi}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

b) $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k^2+n^2}$ $(n \geqslant 2)$

c) $t_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

5 Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^8}\,\mathrm{d}t$.

SUITE DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

6 **(G2E 2007)**
Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\forall x \in]-1,1],\ \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x).$$

Soit $x \in]-1,1]$.

a) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{N}(-t)^{n-1}\right)\mathrm{d}t$.

b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^x \frac{t^N}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$.

c) Conclure.

7 Etudier la monotonie des suites suivantes :

1) $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ 2) $b_n = \displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^n\,\mathrm{d}x$

8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}t$.

1) Donner la monotonie des suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$.
2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$.
4) En déduire la limite de J_n et celle de nJ_n puis donner un équivalent J_n.

9 Si $m, n \in \mathbb{N}$, on pose $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que : $\forall n, m \in \mathbb{N}, I_{m,n} = I_{n,m}$.
2) Montrer que pour $m \geqslant 1$, on a : $I_{m,n} = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$.
3) En déduire la valeur de $I_{m,n}$.
4) Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{m+k+1}$.

10 **(Agro A 2004 ou 2012), Intégrales de Wallis**

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n\,\mathrm{d}x$.

1) Déterminer A_0, A_1.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n > 0$.
3) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $A_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} A_n$.
5) Déduire de ce qui précède que , pour tout p in $\mathbb{N}$, on a :

$$A_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2},$$

et donner une formule similaire pour A_{2p+1}.

6) Montrer que pour tout entier naturel, vérifiant $n \geqslant 2$, on a :

$$1 \leqslant \frac{A_{n-1}}{A_n} \leqslant \frac{A_{n-2}}{A_n} \leqslant \frac{n}{n-1}.$$

En déduire la limite de $\dfrac{A_{n-1}}{A_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ puis un équivalent de A_n.

Fonction définie par une intégrale

---

11 Soit G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $G(x)$ existe pour tout $x \geqslant 0$.
2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée. En déduire le sens de variations de G sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que $\forall x \geqslant 0, G(x) \leqslant x$. En déduire la position de la courbe de G par rapport à sa tangente en 0.
4. a) Prouver que $\forall x \geqslant 0, G(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-2t+1}\,\mathrm{d}t$ puis que G est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   b) En déduire que G admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ et que $\ell \in [0, \frac{\mathrm{e}}{2}]$.
   c) Montrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, \ell[$

12 Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

1) Justifier l'existence de f.
2) Etudier la parité de f.
3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et étudier les variations de f.
4) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

13 **(Agro Oral 2017)**

On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1) a) Proposer une fonction Python prenant en argument un réel $x > 0$ et retournant une approximation de $f(x)$.

   b) Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique.

   Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur les limites au bord de son domaine de définition.

2) Soient x et x' dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$.
   En déduire que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$.
   On ne demande pas de déterminer la valeur de cette limite à ce stade de l'exercice.

4) Dans cette question, on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

   a) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[, |f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{2\,|x - x_0|}{x_0^2}$.

   b) En déduire que f est continue en x_0.

5) Montrer qu'il existe un réel A tel que pour tout réel x strictement positif :
   $\dfrac{A}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{A}{x}$.
   Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ?
   En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.