CH2 : Intégration sur un segment

D1. Primitives

Soit f une fonction définie sur I , un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

T2. Existence de primitives

Soit f une fonction continue sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$.

- f admet au moins une primitive sur I .
- Si F_1 est une primitive de f sur I , alors F_2 est une primitive de f sur I si et seulement si $(F_2 - F_1)$ est constante sur I.
- Soit $x_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que : $F(x_0) = a$.

D3. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Si f est continue sur un intervalle I, pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

Remarque : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et a un point de I, alors :

$$\forall x \in I, f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

T4. Théorème fondamentale de l'analyse (Unicité d'une primitive qui s'annule en un point)

Soit f une fonction continue sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I **s'annulant en** a.

D5. Aire d'une portion de plan

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, $a < b$.
On note (C_f) la courbe représentative de f dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ i.e :

$$C_f = \{M(x, y) \,/\, x \in [a, b] \ , \ y = f(x)\}.$$

Soit :

$$R_f = \left\{M(x, y) \text{ dans } (0, \vec{i}, \vec{j}) \,/ a \le x \le b, y \in [0, f(x)]\right\}$$

On appelle :

- aire algébrique, dans le repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, de la portion de plan R_f, le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

- aire géométrique, dans le repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, de la portion de plan R_f, le nombre réel :

$$\int_a^b |f(x)|\, dx.$$

T6. Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. $\forall (a,b,c) \in I^3$,

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

T7. Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur I .
$\forall (a,b) \in I^2$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

T8. positivité et croissance de l'intégrale

Soit f continue sur l'intervalle I, $(a,b) \in I^2$, $a \leq b$.

- Si $\forall x \in [a,b]\,,\ f(x) \geq 0$, alors on a :

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

et dans tous les cas :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt\ .$$

- Si g est aussi continue sur I et $\forall x \in [a,b]\,,\ f(x) \leq g(x)$ alors on a :

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

T9. Stricte positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue et à valeurs positives sur $[a,b]$ avec $a < b$.

- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0$ alors : $\forall t \in [a,b]$, $f(t) = 0$.

  Par contraposition :

- S'il existe $t_0 \in [a,b]$ où f ne s'annule pas alors :

$$\int_a^b f(t)\, dt > 0$$

D10. Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$, le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

La valeur moyenne appartient à l'ensemble de valeurs atteintes par la fonction f.

T11. Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I .
$\forall(a,b)\in I^2$,

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

T12. Formule de changement de variable

Soit f une fonction continue sur I et φ une fonction de classe C^1 sur J à valeurs dans I (I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$).
Soient $(a,b)\in I^2, (\alpha,\beta)\in J^2/\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

T13. Convergence des sommes de Riemann à pas constant

Soit a, b deux réels tels que $a<b$.
Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ ou } \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Cas particulier important sur $[0,1]$:

Soit f est une fonction continue sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \text{ ou } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

Primitives usuelles

Ce tableau fournit des primitives de fonctions sur un intervalle où ces fonctions sont continues

$\int x^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\int u'(x)(u(x))^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + c$ avec $n \in \mathbb{N}$
$\int \dfrac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + c$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\int \dfrac{u'(x)}{u(x)} \, \mathrm{d}x = \ln\lvert u(x)\rvert + c$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ sur $\mathbb{R}_+^*$	$\int u'(x)(u(x))^\alpha \, \mathrm{d}x = \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c$ sur $\mathbb{R}$	$\int u'(x)e^{u(x)} \, \mathrm{d}x = e^{u(x)} + c$
$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x\ln x - x + c$ sur $\mathbb{R}_+^*$	$\int u'(x)\ln(u(x)) \, \mathrm{d}x = u(x)\ln(u(x)) - u(x) + c$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + c$ sur $\mathbb{R}$	$\int \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2} \, \mathrm{d}x = \arctan(u(x)) + c$
$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$ sur $\mathbb{R}$	$\int u'(x)\cos u(x) \, \mathrm{d}x = \sin u(x) + c$
$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$ sur $\mathbb{R}$	$\int u'(x)\sin u(x) \, \mathrm{d}x = -\cos u(x) + c$

Remarque : Soit a un réel non nul.
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$.