CORRIGÉ EXERCICE N°13 TD2 : ORAL AGRO 2017

1. a) On sait d'après le théorème des sommes de Riemann, la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{x+t}$ est continue sur $[0,1]$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{cos(\frac{k}{n})}{\frac{k}{n}+x} = f(x).$$

On programme alors la somme précédente avec un n assez grand pour avoir une approximation de $f(x)$.

Code

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import cos

def approxf(x): # somme de Riemann avec n=1000
    s = 0
    for k in range(1000):
        s += cos(k / 1000) / (k / 1000 + x)
    return s / 1000

# on trace une approximation de la courbe de f sur [0.001,100]
def trace():
    x = np.linspace(0.001,100,500) # abcisses
    y = [approxf(t) for t in x]  # ordonnées
    plt.plot(x,y)
    plt.show()
```

b) Les 4 dernières instructions du programme précédent permettent une approximation du graphe de la fonction f.

On peut conjecturer que :
f est décroissante , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

2. Soient x et x' dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < x'$.

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') &= \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x'+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\cos(t)}{x+t} - \frac{\cos(t)}{x'+t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (x'-x)\frac{\cos(t)}{(x+t)(x'+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= (x'-x)\int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x'+t)}\,\mathrm{d}t \quad (*) \end{aligned}$$

$\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{\cos(t)}{(x+t)(x'+t)} \geqslant 0$. Comme $(0<1)$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x'+t)} \geqslant 0$.
Ainsi $f(x) - f(x')$ est du signe de $x'-x$ donc $f(x) - f(x') \geqslant 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

3. • On sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{\cos(t)}{(x+t)} \geqslant 0$. Comme $(0<1)$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)} \geqslant 0$.
Ainsi $f(x) \geqslant 0$ et f est minorée par 0.

Donc par le théorème de limite monotone, $\boxed{f \text{ admet une limite finie en } +\infty.}$

4. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

a) Soit $x \in \left[\dfrac{x_0}{2}, +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x_0 - x|\left|\int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x_0+t)}\,\mathrm{d}t\right| \quad \text{(d'après (*))} \\ &= |x - x_0|\int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x_0+t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{(intégrale positive)} \end{aligned}$$

De plus, $\forall t \in [0,1], \cos(t) \leqslant 1$ et $(x+t)(x_0+t) \geqslant x \cdot x_0 \geqslant \dfrac{x_0^2}{2}$,

Donc $\dfrac{\cos t}{(x+t)(x_0+t)} \leqslant \dfrac{2}{x_0^2}$.

Comme $(0<1)$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x_0+t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{x_0^2}\underbrace{\int_0^1 1\,\mathrm{d}t}_{=1}$.

Ainsi $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x_0+t)}\,\mathrm{d}t \leqslant |x - x_0| \cdot \frac{2}{x_0^2}$

Donc $\boxed{\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[, \ |f(x)-f(x_0)| \leqslant \frac{2\,|x-x_0|}{x_0^2} \text{ (**)}.}$

b) D'après la question précédente, $0 \leqslant |f(x)-f(x_0)| \leqslant \dfrac{2\,|x-x_0|}{x_0^2}$.

Or $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2\,|x-x_0|}{x_0^2} = 0$, donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)-f(x_0)| = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Donc $\boxed{f \text{ est continue en } x_0.}$

5. • Soit $x > 0$.

$\forall t \in [0,1], \ \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x+t} \leqslant \dfrac{1}{x}$

donc $\dfrac{\cos t}{x+1} \leqslant \dfrac{\cos t}{x+t} \leqslant \dfrac{\cos t}{x}$ car $\cos(t) > 0$

Comme $(0<1)$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{x+1}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 \frac{\cos t}{x}\,\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{x+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}\int_0^1 \cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 \cos(t)\,\mathrm{d}t$.

En notant $A = \displaystyle\int_0^1 \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin 1$ (indépendant de x), il vient donc que :

$$\frac{A}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{A}{x}.$$

Par conséquent,

$\boxed{\text{il existe un réel } A \text{ tel que pour tout réel } x \text{ strictement positif : } \dfrac{A}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{A}{x}}$

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{A}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{A}{x} = 0$, alors par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ce résultat est donc cohérent avec le graphe de f.

• $A = \sin 1 > 0$ (autre argument possible : $t \mapsto \cos t$ est continue, positive et non nulle sur $[0,1]$, donc $A = \displaystyle\int_0^1 \cos(t)\,\mathrm{d}t > 0$). Ainsi :

$$\frac{\frac{A}{x+1}}{\frac{A}{x}} \leqslant \frac{f(x)}{\frac{A}{x}} \leqslant 1,$$

c'est à dire,

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \frac{f(x)}{\frac{A}{x}} \leqslant 1.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{A}{x}} = 1$.

Ainsi $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{x}.}$

6. a) Admettons l'inégalité suivante : $\forall t \in [0,1], |\cos(t)-1| \leqslant \frac{t^2}{2}$,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |g(x)| &= \left|\int_0^1 \frac{\cos(t)-1}{x+t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{|\cos(t)-1|}{x+t}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{|\cos(t)-1|}{x+t}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{\frac{t^2}{2}}{x+t}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{x+t}\cdot t\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 t\,\mathrm{d}t}_{=1} \quad \left(\text{car } \frac{t}{x+t} \leqslant 1\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est une fonction bornée.}}$

b) $$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^1 \frac{\cos(t)-1}{x+t}\,\mathrm{d}t = f(x) - \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t \\
&= f(x) - [\ln|x+t|]_0^1 \\
&= f(x) - \ln(x+1) + \ln(x)
\end{aligned}$$

Donc $f(x) = g(x) + \ln(x+1) - \ln(x)$.

On devine ici l'équivalent de f : $-\ln x$,

Montrons que $f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln(x)$.

$\dfrac{f(x)}{-\ln x} = \dfrac{g(x)}{-\ln(x)} + \dfrac{\ln(x+1)}{-\ln(x)} + 1.$

On sait que $\lim\limits_{x\to0}(-\ln(x)) = +\infty$. De plus,

- g est bornée, donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g(x)}{-\ln(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0} \ln(x+1) = 0$, donc $\dfrac{\ln(x+1)}{-\ln(x)} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{-\ln x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{-\ln(x)} + \dfrac{\ln(x+1)}{-\ln(x)} + 1 = 1$

Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x).}$