TD N°1C : ÉTUDE DES SUITES IMPLICITES

Les techniques utilisées : utilisation des propriétés de la suite et de la bijection réciproque de la fonction

1 Soient a et b deux réels vérifiant $a, b > 0$ et $a + b > 1$ et n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = x^n - ax - b.$$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}_+$, notée u_n.
2) Démontrer que $\forall n \geqslant \lfloor a \rfloor + 1, u_n > 1$.
3) En déduire que $(u_n)_{n \geqslant \lfloor a \rfloor + 1}$ est décroissante, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2 Soit n un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. Etudier les variations de f_n. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $x^n = \mathrm{e}^x$ admet une unique solution x_n dans $[0, n]$ et une unique solution y_n dans $]n, +\infty[$.
2. Etude de $(x_n)_{n \geqslant 3}$.
   a) Montrer que $\forall n \geqslant 3, x_n \geqslant 1$.
   b) En étudiant le signe de $f_{n+1}(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
   c) Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Quelle est la limite de $(\ln(x_n))_{n \geqslant 3}$?
   d) Montrer que $\ln(x_n) = \dfrac{x_n}{n}$. En déduire la valeur de ℓ.
   e) Donner un équivalent de $\ln(x_n)$. En déduire un équivalent de $x_n - 1$.
3. Etude de $(y_n)_{n \geqslant 3}$.
   a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$.
   b) Montrer que $\forall n \geqslant 3, \ln(y_n) = \ln(n) + \ln(\ln(y_n))$. En déduire que :
   $$\ln(y_n) \sim \ln(n).$$
   c) En déduire un équivalent de y_n.