Nom : ....

INTERROGATION N°2A :

1 Si α est un réel quelconque, déterminer sur $]0;+\infty[$ l'expression d'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

....

....

---

2 Calculer $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{t(\ln(t)^2+3)}\,\mathrm{d}t$ (poser $u=\ln(t)$)

....

....

....

....

---

3 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \exp(-x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0
2. Calculer I_1 en utilisant une intégration par parties.
3. Démontrer que la suite (I_n) est monotone et converge vers un réel ℓ à déterminer.
4. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$ et en déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Nom : ....

INTERROGATION 2B :

1 Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ sur $\mathbb{R}$ où a un réel non nul.

....

....

---

2 Calculer $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x$ (poser $t = \dfrac{x}{x+1}$)

....

....

....

....

---

3 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \exp(-x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0
2. Calculer I_1 en utilisant une intégration par parties.
3. Démontrer que la suite (I_n) est monotone et converge vers un réel ℓ à déterminer.
4. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$ et en déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

CORRECTION DE L'INTERRO N°2 :

---

2 Interrro 1A : $I = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{t(\ln(t)^2+3)}\,\mathrm{d}t$ (poser $u = \ln(t)$)

Avec le changement de variable $u = \ln(t)$, on a :

- $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
-

t	e	e^3
u	1	3

- u est $\mathcal{C}^1$ sur $[\mathrm{e}\,, \mathrm{e}^3]$

Donc $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+3)} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}$

Donc $\boxed{I = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{18}}$

---

2 Interro 1B : $J = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x$ (poser $t = \dfrac{x}{x+1}$)

$J = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{x+1}{x(x+1)^2} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\,\mathrm{d}t$ Avec le changement de variable $t = \dfrac{x}{x+1}$, on a :

- $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
-

x	$1/2$	1
t	$1/3$	$1/2$

- t est $\mathcal{C}^1$ sur $[1/2, 1]$

Donc $J = \displaystyle\int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_{1/3}^{1/2}$

$= \dfrac{1}{2}(\ln(1/2))^2 - \dfrac{1}{2}(\ln(1/3))^2$

$= \dfrac{1}{2}(\ln(2))^2 - \dfrac{1}{2}(\ln(3))^2$

Donc $\boxed{J = \dfrac{1}{2}(\ln(2))^2 - \dfrac{1}{2}(\ln(3))^2}$

---

3 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \exp(-x)\,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$

2. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   On pose $\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

   Donc en intégrant par parties,

   $I_1 = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + I_0 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$ D'où $\boxed{I_1 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $\forall x \in [0,1], x^{n+1} \leqslant x^n$ donc $x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ (car $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$).

   Comme $0 \leqslant 1$, alors par croissance de l'intégrale , $I_{n+1} \leqslant I_n$.

   Donc $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante}}$

   De plus, $\forall x \in [0,1], 0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$.

   Par croissance de l'intégrale ($0 \leqslant 1$), il vient que $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

   Or $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.}$

4. $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\exp(-x)\,\mathrm{d}x$.

   On pose $\begin{array}{ll} u(x) = x^{n+1} & u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

   Donc en intégrant par parties,

   $I_1 = \left[-x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)I_n$

   Donc $\boxed{I_{n+1} = -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)I_n}$

5. D'après la relation précédente et utilisant le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, on a : $nI_n = I_{n+1} + \mathrm{e}^{-1} - I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}$

   Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \mathrm{e}^{-1}.}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nI_n}{\mathrm{e}^{-1}} = 1$, d'où $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}.}$