Correction DS n°1

I. Etude de la fonction f.

1. a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les théorèmes généraux, et on a :
$g'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x^2 \cdot \frac{1}{x} = -4x\ln x$, qui est du signe de $-\ln x$.
Ainsi, $g'(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 1$. Le tableau de variation est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Pour les limites :
- $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x = 0$: c'est une croissance comparée. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1}$.
- $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$ (il n'y a plus de forme indéterminée).

b) Montrons que l'équation $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet une unique solution.
D'après le tableau précédent :
- g est croissante sur $]0,1]$ et g tend vers 1 en 0, donc $g(x) \geqslant 1$ sur $]0,1]$, en particulier g ne s'annule pas sur cet intervalle.
- g est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ vers $g\left(\left[1,+\infty\right[\right) = \left]-\infty,2\right]$.
  Or $0 \in \left]-\infty,2\right]$, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1,+\infty[$..

Donc $\boxed{g(x) = 0 \text{ admet une et une seule solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ que l'on note } \alpha}$.

c) D'après les questions précédentes, le signe de g est donné par le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est donnée par :
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - (\ln x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}.$$
Ainsi, pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\searrow$	0

Pour les limites :
- $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty}$ (ce n'est pas une forme indéterminée).
- $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissances comparées,
  donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
- α vérifie $g(\alpha) = 0$, donc $1 + \alpha^2 - 2\alpha\ln\alpha = 0$, donc $\ln\alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$, puis $f(\alpha) = \frac{\ln\alpha}{1+\alpha^2}$ donc $\boxed{f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}}$.

II. Etude de la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc admet des primitives sur cet intervalle. Par conséquent F, qui est la primitive de f qui s'annule en 1, est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est f : $\boxed{F'(x) = f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}}$.
$F'(x)$ est du signe de $\ln x$, le tableau de variation de F est donc le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4. Etudions la limite de F en 0.

a) La fonction $\arctan$ est dérivable en 0.

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x}=\arctan'(0)=1$

Ainsi comme $\arctan(0)=0$ il vient que : $\boxed{\arctan(x)\underset{x\to 0}{\sim}x.}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=1$ car $\arctan(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$.

Donc $\boxed{u \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$

Dans la suite, u désigne la fonction ainsi prolongée en 0. u est désormais une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $u(0)=1$.

c) Posons : $v(t)=\ln(t)$ $\quad v'(t)=\dfrac{1}{t}$

$w'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ $\quad w(t)=\arctan(t)$

On intègre par parties, en remarquant que les deux fonctions v et w sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$F(x)=\displaystyle\int_1^x \ln t\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt=\Big[\ln t\arctan\,t\Big]_1^x-\int_1^x\frac{1}{t}\arctan\,t\,dt$, qui donne

$$\boxed{F(x)=(\arctan\,x)(\ln x)-\int_1^x u(t)\,dt}.$$

d) • Après prolongement, u est continue sur $\mathbb{R}^+$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}^+$. La fonction $x\mapsto\displaystyle\int_1^x u(t)\,dt$ est la primitive de u qui s'annule en 1. Elle est donc continue (et même dérivable) sur $\mathbb{R}^+$. En particulier elle est continue en 0, ce qui donne $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_1^x u(t)\,dt=\int_1^0 u(t)\,dt}$.

• $(\arctan\,x)(\ln x)=u(x)\times x\ln x$.
Or $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=1$, et $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ (par croissances comparées). Donc $\lim\limits_{x\to 0}(\arctan\,x)(\ln x)=0$.

On déduit de ces deux points que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}F(x)=-\displaystyle\int_1^0 u(t)\,dt=\int_0^1 u(t)\,dt}$

5. Calculons une valeur approchée de $F(0)$.

a) • $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}W_{2n+3}-W_{2n+1}&=\frac{(-1)^{2n+3}}{(2(2n+3)+1)^2}+\frac{(-1)^{2n+2}}{(2(2n+2)+1)^2}+\cancel{W_{2n+1}}-\cancel{W_{2n+1}}\\&=-\frac{1}{(4n+7)^2}+\frac{1}{(4n+5)^2}\end{aligned}$$

Or $(4n+7)^2\geqslant(4n+5)^2$ donc $\dfrac{1}{(4n+7)^2}\leqslant\dfrac{1}{(4n+5)^2}$.

Ainsi $W_{2n+3}-W_{2n+1}\geqslant 0$ et la suite (W_{2n+1}) est croissante.

• $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}W_{2n+2}-W_{2n}&=\frac{(-1)^{2n+2}}{(2(2n+2)+1)^2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2(2n+1)+1)^2}+\cancel{W_{2n}}-\cancel{W_{2n}}\\&=\frac{1}{(4n+5)^2}-\frac{1}{(4n+3)^2}\end{aligned}$$

Or $(4n+5)^2\geqslant(4n+3)^2$ donc $\dfrac{1}{(4n+5)^2}\leqslant\dfrac{1}{(4n+3)^2}$.

Ainsi $W_{2n+2}-W_{2n}\leqslant 0$ et la suite (W_{2n}) est décroissante.

• $W_{2n+1}-W_{2n}=\dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2(2n+1)+1)^2}+\cancel{W_{2n}}-\cancel{W_{2n}}=-\dfrac{1}{(4n+3)^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Ainsi $\boxed{\text{les suites } (W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (W_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$.

Donc elles convergent vers la même limite ℓ.

Ainsi la suite des termes pairs et impaires de (W_n) convergent vers la même limite, donc $\boxed{(W_n) \text{ converge aussi vers } \ell.}$

b) Soit x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, k appartenant à $\mathbb{N}$, notons $I_k(x)=\displaystyle\int_1^x t^k\ln(t)\,dt$.

i) • Si $x\in]0,1[$, pour $t\in[x,1]$, $t^k\geqslant 0$ et $\ln(t)\leqslant 0$ donc $-t^k\ln(t)\geqslant 0$.

Comme $x<1$, alors $\displaystyle\int_x^1 -t^k\ln(t)\,dt\geqslant 0$.

Par conséquent, $\displaystyle\int_1^x t^k\ln(t)\,dt\geqslant 0$.

• Si $x\geqslant 1$, pour $t\in[1,x]$, $t^k\geqslant 0$ et $\ln(t)\geqslant 0$ donc $t^k\ln(t)\geqslant 0$.

Comme $1\leqslant x$, alors $\displaystyle\int_1^x t^k\ln(t)\,dt\geqslant 0$.

Par conséquent, $\displaystyle\int_1^x t^k\ln(t)\,dt\geqslant 0$.

Dans tous les cas, $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ I_k(x)\geqslant 0.}$

ii) Posons : $v(t)=\ln(t)$ $\quad v'(t)=\dfrac{1}{t}$

$w'(t)=t^k$ $\quad w(t)=\dfrac{t^{k+1}}{k+1}$

v et w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ Donc en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}I_k(x)&=\int_1^x t^k\ln t\,dt=\left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)}\ln t\right]_1^x-\int_1^x\frac{t^{k+1}}{k+1}\frac{1}{t}\,dt\\&=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x-\frac{1}{k+1}\int_1^x t^k\,dt=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x-\frac{1}{k+1}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}-\frac{1}{k+1}\right].\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{I_k(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}\ln x + \dfrac{1}{(k+1)^2}\left(1 - x^{k+1}\right)}$.

iii) On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}\ln x = 0$ (limite usuelle, $\ln(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^{k+1}}$ au voisinage de 0).

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} I_k(x) = \dfrac{1}{(k+1)^2}.}$

c) Soit n un entier naturel et $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(-t^2\right)^k \\ &= \frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1-\left(-t^2\right)} \quad \text{(somme usuelle, avec } -t^2 \neq 1) \\ &= \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{1+t^2} = (-1)^{n+1}\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} + \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}.}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$

$$\begin{aligned}F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x \ln t\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\ln t + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+2}}{1+t^2}\ln t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_1^x t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+2}}{1+t^2}\ln t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On a bien : $\boxed{F(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+2}}{1+t^2}\ln t\,\mathrm{d}t}$.

Par conséquent :

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| = \left|\int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln t\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}(-\ln t)\,\mathrm{d}t\right|$$

($x < 1$: on remet les bornes dans l'ordre croissant afin d'appliquer l'inégalité triangulaire pour les intégrales)

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant \int_x^1 \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}(-\ln t)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}(-\ln t)\,\mathrm{d}t$$

(car $-\ln t \geqslant 0$)

On utilise ensuite : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, ce qui donne

$\left|F(x) - \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant \displaystyle\int_x^1 t^{2n+2}(-\ln t)\,\mathrm{d}t$, ou encore

$\left|F(x) - \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant \displaystyle\int_1^x t^{2n+2}\ln t\,\mathrm{d}t$,

d'où $\boxed{\left|F(x) - \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant I_{2n+2}(x)}$.

e) On passe à la limite lorsque x tend vers 0 dans cette inégalité, en utilisant la limite de I_k en 0 trouvée en 5.b)iii), et la continuité de F en 0, il vient que :

$\left|F(0) - \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{1}{(2k+1)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}$, c'est à dire :

$\boxed{|F(0) - W_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}.}$

On a alors l'encadrement $0 \leqslant |F(0) - W_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(2n+3)^2} = 0$ donc par encadrement,

$\lim\limits_{n\to+\infty} |F(0) - W_n| = 0$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = F(0).}$

6. Etudions la dérivabilité de F en 0.

a) Soit $x \in]0,\alpha]$.

F est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$,

donc d'après la formule des accroissements finis, il existe c dans $]0,x[$

$\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = F'(c) = \dfrac{\ln(c)}{1+c^2} = f(c).$

En utilisant la croissance de f sur $]0,\alpha]$, on a que : $f(c) \leqslant f(x)$,

c'est à dire que $\boxed{\dfrac{F(x)-F(0)}{x} \leqslant f(x).}$

Or $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, donc par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = -\infty}$.

b) On peut l'interpréter de la façon suivante : la fonction F n'est pas dérivable en 0, mais sa courbe représentative admet une tangente verticale en ce point.

7. Etudions la limite de F en $+\infty$.

a) On effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{t} (\Longleftrightarrow t = \dfrac{1}{u})$.

- On a $t = \dfrac{1}{u}$
- $dt = -\dfrac{1}{u^2}\, du$;
- Pour les bornes : $\begin{array}{c|c|c} t & 1 & x \\ \hline u & 1 & \frac{1}{x} \end{array}$

On obtient :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = \int_1^{1/x} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \left(-\frac{1}{u^2}\right)\, du = \int_1^{1/x} -\frac{-\ln u}{u^2+1}\, du$$

$$= \int_1^{1/x} \frac{\ln u}{1+u^2}\, du = F(\frac{1}{x}).$$

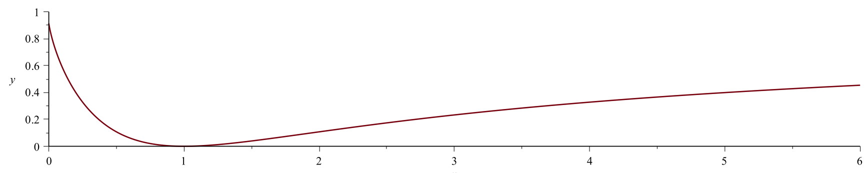
Ainsi $\boxed{\forall x > 0,\ F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

b) Par conséquent, on a en composant les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} F(y) = F(0) \text{ par continuité de } F \text{ en } 0.$$

On peut interpréter géométriquement le résultat de la façon suivante : la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = F(0)$

c) Courbe de F :



III. Etude d'une suite définie implicitement

8. Soit $n \geqslant 2$.
D'après la question **3.**, et **4.**d), F est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$.
Donc F réalise une bijection de $[0,1]$ vers $F([0,1]) = [0, F(0)]$.
Or $\dfrac{1}{n} \in [0, F(0)]$ car $F(0) \approx 0,92$,
donc l'équation $F(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution sur $[0,1]$, notée u_n.

9. Soit $n \geqslant 2$.
On a que $F(u_n) = \dfrac{1}{n}$ et $F(u_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$. Donc $F(u_{n+1}) \leqslant F(u_n)$
Comme F est strictement décroissante sur $[0,1]$ et que u_n et u_{n+1} sont dans $[0,1]$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Finalement, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est croissante.}}$

10. (u_n) est croissante, elle est aussi majorée par 1 donc d'après le théorème de limite monotone la suite (u_n) converge.
De l'égalité $F(u_n) = \dfrac{1}{n}$, on en déduit que $u_n = F^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
D'après la question **3.**, on sait que F^{-1} est continue sur $[0, F(0)]$ et $F(1) = 0$.
Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} F^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right) = F^{-1}(0) = 1.}$