DS N°1

Durée : 2h. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de l'évaluation des copies. La calculatrice est interdite.

Le sujet comporte 2 pages.

Problème

Le plan affine usuel est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Nous considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

I. Etude de la fonction f.

1. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet une unique solution notée α dans la suite.

c) En déduire le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$ dans lequel les limites aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$ doivent figurer.

II. Etude de la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

Dans la suite, F désigne la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. Etudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Etudions la limite de F en 0.

a) Montrer que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

b) Considérons la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u(x) = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

En déduire que u est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite, u désigne la fonction ainsi prolongée en 0. u est désormais une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Par une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \int_1^x u(t)\,\mathrm{d}t.$$

d) En déduire que F admet une limite en 0 et que cette limite est égale à $\displaystyle\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ en 0.

Nous décidons alors de prolonger F par continuité en 0 en posant :

$$F(0) = \int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t,$$

la fonction F est désormais définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

5. Calculons une valeur approchée de $F(0)$.

a) On note pour n dans $\mathbb{N}$, $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.
Montrer que les suites $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Soit x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$ et k appartenant à $\mathbb{N}$, notons $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

i) Déterminer le signe de $I_k(x)$ (pour la démonstration, on pourra distinguer les cas $x \in]0,1[$ et $x \geqslant 1$).

ii) En utilisant une intégration par parties, calculer $I_k(x)$.

iii) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} I_k(x) = \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{1+t^2} = (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}.$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[,\ F(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que :

$$\forall x \in]0,1[,\ \left| F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant I_{2n+2}(x).$$

e) En déduire que :

$$|F(0) - W_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Puis que : $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = F(0)$.

6. Etudions la dérivabilité de F en 0.

a) En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que $\forall x \in]0,\alpha]$, $\dfrac{F(x)-F(0)}{x} \leqslant f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x}$.

b) Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de F en 0 ? Interpréter géométriquement ce résultat.

7. Etudions la limite de F en $+\infty$.

a) Montrer par changement de variable, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x).$$

b) En déduire la limite de F en $+\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

c) Tracer la courbe de F. *On pourra considérer une valeur approchée de $F(0)$ égale à $0,92$.*

III. Etude d'une suite définie implicitement

8. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 l'équation $F(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution sur $[0,1]$, notée u_n.

9. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

10. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.