CH4 : Fiche méthode-Séries

I Les savoir faire

- Savoir déterminer la nature d'une série.
- Savoir calculer la somme d'une série convergente.
- Savoir repérer la divergence grossière.
- Savoir majorer la suite des sommes partielles d'une série convergente.
- Savoir appliquer le théorème de convergence par comparaison ou le critère d'équivalence pour une série à termes positifs.
- Savoir utiliser l'absolue convergence.

II Qu'est ce qu'une série convergente ?

Convergence-Divergence

- On dit que la **série** $\sum u_n$ **converge** si la suite (S_n) est convergente. Dans ce cas, la limite de cette suite est alors appelée **somme de la série** et on la note $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Remarque : $S_n - S_{n-1} = u_n$

III Les séries usuelles

Pour information : de manière générale, une série de Riemann est une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ avec α un réel.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

Ce résultat est hors programme. Vous ne pouvez pas l'utiliser mais il donne des idées.

Les séries usuelles du programme

- Les séries géométriques et géométriques dérivées :
  Si $|q| < 1$, les séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

  Si $|q| \geqslant 1$, les séries précédentes divergent.
- Les séries exponentielles :
  Soit x réel, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$
- Les séries de Riemann :
  ✓ La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ (série harmonique) est une série divergente.
  ✓ La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.
- Les séries télescopiques : reconnaître la situation d'une série télescopique, calculer les sommes partielles et faire tendre n vers $+\infty$.

IV Déterminer la nature d'une série et sa somme

Méthode pour étudier la nature d'une série

- Il peut s'agir d'un cas de divergence grossière (le terme général ne tend pas vers 0).
- On calcule $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
  - ✓ S_n se calcule directement : On calcule S_n et on regarde sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
  - ✓ S_n ne se calcule pas mais on peut écrire S_n comme combinaison linéaire de sommes partielles de séries de référence. On calcule sa limite lorsque n tend vers $+\infty$ en utilisant le cours sur les séries de référence.
- Il peut s'agir d'une série à termes positifs : on peut utiliser le théorème de comparaison (utiliser les DL si besoin en se ramenant en 0 avec par exemple $u = \frac{1}{n}$).
- S'il s'agit d'une série à termes négatifs ou à termes non constants , on peut se ramener au cas précédent en utilisant la série $\sum |u_n|$ et montrer que la série converge absolument.

Somme d'une série convergente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

V Séries à termes positifs et théorèmes de convergence

Séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

La suite (S_n) de ses sommes partielles est croissante.

$$(S_n) \text{ converge } \iff (S_n) \text{ est majorée.}$$

En cas de convergence, $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$

Théorèmes de convergence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs.

1. **Par comparaison** : Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_0.
   Alors :
   - Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
   - Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
2. **Par équivalence** : Si $u_n \sim v_n$
   Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Point méthode pour le théorème de comparaison

Les termes généraux u_n et v_n doivent être positifs.

- Pour démontrer que $\sum u_n$ converge, on doit majorer u_n à partir d'un certain rang par v_n qui est le terme général d'une série convergente.
- Pour démontrer que $\sum u_n$ diverge, on doit minorer u_n à partir d'un certain rang par v_n qui est le terme général d'une série divergente.