CH 4 : SÉRIES

Table des matières

Situation : Soit (u_n) une suite de réels.

1. Est-ce que $u_0 + u_1 + .. + u_n + ...$ définit un réel ?
2. Si oui, lequel ?

Remarque : Rappel : Dans $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, n est fixé et k est une variable muette, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre sauf n.

I Vocabulaire d'une série

Définition 1 - Série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On appelle **série de terme général** u_n, la suite (S_n) définie pour tout entier n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

S_n s'appelle la **somme partielle d'indice** n.
La série est notée $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou plus succintement $\sum u_n$.

Remarque : Si la suite (u_n) n'est définie que pour $n \geq n_0$, il en est de même pour la série de terme général u_n et $\forall n \geqslant n_0, S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$. La série est alors notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ ou plus succintement $\sum u_n$.

Exemple 1 **:** Calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans les cas suivants :

a) Si $u_n = n$, alors $S_n =$

b) Si $u_n = \dfrac{1}{3^n}$, alors $S_n =$

Remarque : $S_n - S_{n-1} = u_n$ donc si on connait les sommes partielles, on connait u_n.

Définition 2 - Convergence-divergence

- On dit que la **série** $\sum u_n$ **converge** si la suite (S_n) est convergente.
  Dans ce cas, la limite de cette suite est alors appelée **somme de la série** et on la note $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Remarques : **Ne pas confondre** :

✓ la série $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ qui désigne la suite des sommes partielles (S_n) , on va s'intéresser à la convergence de cette suite.

✓ le nombre $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ qui désigne la somme de la série c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles.

⚠ On ne peut utiliser la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ que **si l'on a démontré que la série converge.**

Remarques :

- **Déterminer la nature** d'une série signifie déterminer si la série est **convergente ou divergente**.
- Si la série est convergente et définie à partir du rang n_0, alors $S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$
- On ne modifie pas la nature d'une série si l'on modifie un nombre **fini** de ses termes. En revanche, en cas de convergence, cela peut changer la valeur de la somme. En cas de convergence ($n_0 < n_1$) :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{+\infty} u_k.$$

Exemple 2 : Déterminer la nature des séries $\sum n$ et $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Exemple 3 : ♥ Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$.

Proposition 1 - Combinaison linéaire de séries convergentes

Soient deux séries réelles **convergentes** $\sum u_n$, $\sum v_n$ et α un réel.

Alors

- la série de terme général $u_n + v_n$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$
- la série de terme général αu_n est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha u_k = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Remarque : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire sur la nature de $\sum(u_n + v_n)$.

* La série $\sum(u_n + v_n)$ peut converger.
* La série $\sum(u_n + v_n)$ peut diverger.

  Par exemple avec $u_n = n$ et $v_n = -n$, les séries de termes général u_n et v_n divergent et pourtant la série de terme général $u_n + v_n$ converge. (La suite de ses sommes partielles est nulle) et la série de terme général $u_n + u_n = 2u_n$ diverge (La suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.)

Remarque : Avec Python, conjecturons la nature de la série de terme général $\left(\frac{1}{3}\right)^n + n$.

Corollaire 1

Soient deux séries réelles **convergentes** $\sum u_n$, $\sum v_n$.
Alors $\forall\,(\alpha,\beta)\ \in\ \mathbb{R}^2$, la série de terme général $\alpha u_n+\beta v_n$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha u_k+\beta v_k)=\alpha\sum_{k=0}^{+\infty}u_k+\beta\sum_{k=0}^{+\infty}v_k.$$

II Séries usuelles à connaître par coeur

Proposition 2 - Les séries géométriques

Soit $q\in\mathbb{R}$, alors :

1. Si $|q|\geqslant 1$, la série de terme général q^n diverge.
2. Si $|q|<1$, alors la série de terme général q^n converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}q^k=\dfrac{1}{1-q}$

Démonstration : $\square$

Exemple 4 **:** ♥Montrer que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge et calculer $\sum\limits_{k=4}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

Remarque **:** Pour $n_0\in\mathbb{N}$, si $|q|<1$, alors $\sum\limits_{k=n_0}^{+\infty}q^k=\dfrac{q^{n_0}}{1-q}$.

Proposition 3 - Les séries géométriques dérivées

Si $|q|<1$, alors

- $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=\dfrac{1}{(1-q)^2}$ (La somme peut démarrer à 0)
- $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2}=\dfrac{2}{(1-q)^3}$ (La somme peut démarrer à 0 ou 1)

Démonstration : $\square$

Séries à identifier $\sum nq^n$ et $\sum n^2q^n$

Vous devez savoir retrouver les résultats suivants :

Lorsque $|q| < 1$, les séries de terme général nq^n et n^2q^n sont convergentes et on peut calculer leur somme :

En effet,

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n} kq^k = q \sum_{k=0}^{n} kq^{k-1}$.

Comme $|q| < 1$, la série géométrique dérivée $\sum nq^{n-1}$ converge .

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$ et la série de terme général nq^n converge de somme

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}}.$$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n} k^2q^k = \sum_{k=0}^{n} k(k-1+1)q^k = q^2 \sum_{k=0}^{n} k(k-1)q^{k-2} + q \sum_{k=0}^{n} kq^{k-1}$.

Comme $|q| < 1$, les séries géométriques dérivées $\sum n(n-1)q^{n-2}$ et $\sum nq^{n-1}$ convergent.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k^2q^k = \frac{2q^2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$ et la série $\sum n^2q^n$ converge de somme :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} k^2q^k = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}}.$$

Remarque : Ces formules serviront dans un prochain chapitre sur les variables aléatoires infinies pour calculer des espérances et des variances.

Exemple 5 : ♥Nature et somme de la série de terme général $u_n = ne^{-n}$

Exemple 6 : ♥Nature de la série de terme général $\frac{n^2}{(\sqrt{3})^{2n+1}}$ et calculer sa somme en cas de convergence.

Proposition 4 - Les séries exponentielles

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors la série de terme général $(\frac{x^n}{n!})$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Exemple 7 : ♥Déterminer la nature et la somme de $\sum \frac{1}{(n+1)!}$

Les séries télescopiques (à savoir mettre en oeuvre sur des exemples)

On cherche à étudier une série de terme général $a_{n+1} - a_n$. Pour cela on calcule les sommes partielles qui sont des sommes télescopiques :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k = \cancel{a_1} - a_0 + a_2 - \cancel{a_1} + \cdots \cancel{} + a_{n+1} - \cancel{a_n} = a_{n+1} - a_0$$

Si (a_n) diverge, alors la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ diverge.
Si (a_n) converge vers ℓ, alors la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge vers $\ell - a_0$.

Le résultat n'est pas à apprendre par coeur mais à savoir refaire !

Exemple 8 **:** ♥Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(1+\frac{1}{n})$.

Proposition 5 - Deux séries de Riemann

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ (série harmonique) est une série divergente.
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.

Démonstration : Montrons que la série harmonique diverge. le deuxième point est admis. □

Problème : Pour étudier la convergence d'une série, on a besoin de savoir calculer S_n et d'en étudier la limite quand $n \to +\infty$. Or ce n'est pas souvent le cas. Il va falloir être capable d'exploiter d'autres critères.

III Critères de convergence

1 Convergence de la suite/convergence de la série

Théorème 1

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Démonstration : $\square$

Remarque : On peut déduire de ce théorème que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ car la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente, c'est une série exponentielle.

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse. **Contre-exemple** :

$u_n = \dfrac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la série de terme général u_n diverge.

Remarque : La contraposée nous fournit une utilisation très fréquente de ce théorème, on l'appelle la **divergence grossière** :

si le terme général u_n ne tend pas vers 0, alors la série diverge

Utilisation : $u_n = 2 + \dfrac{1}{\ln n}$. La suite (u_n) ne converge pas vers 0 donc la série de terme général u_n diverge.

2 Cas privilégié des séries à termes positifs, théorème de comparaison

On appelle série à termes positifs, une série $\sum u_n$ dont tous les termes u_n sont positifs.

Proposition 6

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle de rang n.
Alors

- Si (S_n) est majorée alors $\sum u_n$ est convergente.
- Sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et $\sum u_n$ est divergente.

Démonstration : □

Cela nous fournit **deux théorèmes très important de convergence** : l'un par comparaison, l'autre par équivalence :

Théorème 2 - Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs.
Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_0. Alors :

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Remarque : **Lorsque les deux séries convergent**, on peut écrire :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

Théorème 3 - Equivalence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs.
Si $u_n \sim v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 9 : ♥Donner la nature des séries $\sum \frac{1}{n^5}, \sum \frac{n+3}{n^3+1}$.

Exemple 10 : ♥Donner la nature des séries $\sum \frac{2+\sin(n)}{\sqrt{n}}$ et $\sum(\sqrt{n^2-1}-n)$

Exemple 11 : Donner la nature de la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$ (Méthode à savoir refaire)

Point méthode pour le théorème de comparaison

Ce théorème est difficile à appliquer car on doit essayer d'avoir une idée de la convergence ou non de la série. On cherche la nature de $\sum u_n$ série à termes positifs.

- Si on pense que la série $\sum u_n$ est convergente, alors on doit majorer u_n par une suite positive v_n telle que $\sum v_n$ converge.
- Si on pense que la série $\sum u_n$ est divergente, alors on doit minorer u_n par une suite positive v_n telle que $\sum v_n$ diverge.

La suite (v_n) est principalement à puiser dans la collection des séries usuelles.

3 Convergence absolue

Définition 3 - Convergence absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Théorème 4

Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et on a :

$$\left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k|$$

Remarque : On admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes.

La réciproque est fausse

Par exemple, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (les sommes partielles (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes alors qu'elle ne converge pas absolument (la série harmonique diverge !) $\mapsto$ (Voir exercice n°7).

Exemple 12 **:** ♥ Etudier la nature de la série $\sum \frac{(\cos n + \sin n)^n}{3^n}$.