TD N°3 : DÉNOMBREMENT

AUTOUR DES COEFFICIENTS BINOMIAUX ET DES CALCULS DE SOMME

1 Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{i-j}$ 2) $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$ 3) $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$

2 **Des calculs classiques sur les coefficients binomiaux.**

1) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
3) Montrer que pour $n \geqslant k \geqslant 2$, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. En déduire $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.
   Puis en remarquant que $k(k-1) = k^2 - k$, en déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$
4) Montrer que pour tout $(p,k,n) \in \mathbb{N}^3$ tels que $0 \leqslant p \leqslant k \leqslant n$,
$$\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}$$
   puis en déduire la valeur de $S = \sum\limits_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}$
5) pour $0 \leqslant p \leqslant n$, $\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ (Formule de Pascal généralisée).

3 1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$

2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k\binom{n}{2k}$

DÉNOMBREMENT

4

1) Parmi les 12 conseillers municipaux d'une petite ville, sont élus dans cet ordre un maire, un premier adjoint et un second adjoint. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2) De combien de façons peut-on ranger n paires de chaussettes dans p tiroirs ?
3) De combien de façons peut-on constituer tous les trinômes de colle dans une classe de 21 élèves ?
4) Combien existe-t-il de couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$? $i < j$?
5) Un groupe de 10 personnes se retrouvent. Quel est le nombre de poignées de main échangées si tout le monde peut se serrer la main ?
6) Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur (coeur, pique, carreau, trèfle). Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.
   a) Quel est le nombre de mains possibles ?
   b) Combien de mains contiennent un as au moins ?
   c) Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?
7) Quel est le nombre d'anagrammes :
   a) du mot CAHIER ? b) du mot ECOLE ? c) du mot BONBON ?

5 Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

1) On suppose que $p \geqslant 2$. Trouver le nombre de p-listes d'éléments entiers distincts compris entre 1 et n telles que le plus petit soit en premier et le plus grand en dernier.
2) On suppose que $p \geqslant 3$. Trouver le nombre de p-listes d'éléments entiers distincts compris entre 1 et n telles que les trois plus grands soient aux trois premières places (dans l'ordre ou non).

6 **(Formule de Van der Monde)**

Une classe contient a filles et b garçons. Le délégué doit constituer une équipe de sport qui se joue à n joueurs.

1) Combien y-a-t-il d'équipes possibles en tout ?
2) Pour k fixé, combien y-a-t-il d'équipes possibles contenant exactement k filles ?
3) En déduire l'identité suivante : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.
4) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

7 **(Formule d'inversion de Pascal)**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k$.

1) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant j \leqslant n$, $\binom{n}{j}\binom{j}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}$.
2) Pour tout n entier naturel, calculer $\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} u_j$ et montrer que cette expression vaut v_n.
3) *Une application au nombre de permutations de* $\{1, .., n\}$ *laissant* k *points invariants.* Pour n et k entiers naturels non nuls et $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $F_{n,k}$ l'ensemble des permutations de $\{1, .., n\}$ laissant k points invariants. (f étant une permutation de $\{1, .., n\}$ (bijection de $\{1, .., n\}$ dans lui-même), on dit que i est invariant par f lorsque $f(i) = i$). On note $f_{n,k}$ le cardinal de $F_{n,k}$.
   a) Décrire les ensembles $F_{3,0}$, $F_{3,1}$, $F_{3,2}$ et $F_{3,3}$
   b) A l'aide d'un dénombrement , montrer que $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} f_{n,k}$
   c) On pose $f_{0,0} = 1$. Exprimer $f_{n,k}$ en fonction $f_{n-k,0}$. En déduire que $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_{k,0}$.
   d) En utilisant la formule d'inversion de Pascal, montrer que finalement : $f_{n,k} = \dfrac{n!}{k!} \sum\limits_{i=0}^{n-k} \dfrac{(-1)^i}{i!}$.