# DM N°2 CORRECTION : AGRO-VETO 2008

1) Soit $x$ un réel non nul, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est continue sur $[-x, x]$ ou $[x, -x]$.
Par conséquent, $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
Ainsi comme $x \neq 0$, $\dfrac{1}{2x}$ existe aussi.
D'où $\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \neq 0,\ \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}$.
Nous définissons alors la fonction $g$ par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ g(0) = f(0) \end{cases}$

2) $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $f$ admet des primitives définies sur $\mathbb{R}$.
Soit $F$ l'une des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ non nul, } g(x) = \dfrac{1}{2x}\,[F(t)]_{-x}^{x} = \dfrac{F(x) - F(-x)}{2x}.}$

3) On sait que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive de $f$.
- D'après l'expression précédente, on a que $g$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes généraux (composée , somme et quotient bien défini de fonctions continues).

- En $0$ :
$$g(x) = \frac{F(x) - F(0) - (F(-x) - F(0))}{2x} = \frac{1}{2}\frac{F(x) - F(0)}{x} + \frac{1}{2}\frac{(F(-x) - F(0))}{-x}$$
Comme $F$ est dérivable en $0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$ et par composition,
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(-x) - F(0)}{-x} = f(0)$ car $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$.
Donc par somme, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{1}{2}f(0) + \dfrac{1}{2}f(0) = f(0) = g(0)$.
Ainsi $g$ est continue en $0$.

Donc $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

4) • $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à $0$.
•$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
$$g(-x) = \frac{F(-x) - F(x)}{-2x} = \frac{F(x) - F(-x)}{2x} = g(x)$$
$g(-x) = g(x)$ est vraie pour $x = 0$ aussi. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$
D'où $\boxed{g \text{ est paire.}}$
On suppose de plus que $f$ est impaire.
Donc pour tout $x \neq 0$, $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $g(x) = 0$
De plus comme $f(0) = -f(0)$, alors $f(0) = 0$ et on obtient que $g(0) = f(0) = 0$.
Finalement, il vient que $\boxed{g \text{ est la fonction nulle.}}$
Nous définissons l'application $a$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, a(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)).$$

5) • $a(0) = \frac{1}{2}(f(0) + f(0)) = f(0) = g(0)$.
Donc $\boxed{g(0) = a(0)}$
• Soit $x \neq 0$.
$$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) + f(-t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t\right)$$
En effectuant le changement de variable $\mathcal{C}^1$, $u = -t$ avec $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$ dans la deuxième intégrale du membre de droite de l'égalité, il vient que :
$$\begin{aligned}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{-x} f(u)(-\,\mathrm{d}u)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ (variable muette)}\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ (par Chasles)}\end{aligned}$$
Donc $\frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x)$
D'où $\boxed{\text{pour tout réel non nul } x : g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t.}$

6) D'après les théorèmes généraux, $a$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $A : x \mapsto \int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $a$ qui s'annule en $0$.

D'où $A$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}^*$) et $A' = a$.
Ainsi par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en utilisant l'expression de la question précédente.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = -\frac{1}{x^2}A(x) + \frac{1}{x}A'(x) = -\dfrac{1}{x}g(x) + \dfrac{1}{x}a(x)$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, xg'(x) + g(x) = a(x).}$

7) On suppose, dans cette question que $f$ est dérivable en $0$ .
Par somme et composition de fonctions dérivables en $0$, $a$ est dérivable en $0$.
et $a'(0) = \dfrac{1}{2}(f'(0) - f'(-0)) = 0$.
Donc $a$ admet un développement limité à l'ordre 1 en $0$ donné par :

$$a(x) \underset{0}{=} a(0) + a'(0)x + \circ(x) \underset{0}{=} g(0) + \circ(x)$$

Par primitivation , on a : $A(x) \underset{0}{=} A(0) + g(0)x + \circ(x^2)$.
Or $A(0) = 0$ donc $A(x) \underset{0}{=} g(0)x + \circ(x^2)$.
Ainsi $g(x) \underset{0}{=} g(0) + \circ(x)$
Donc $\dfrac{g(x) - g(0)}{x} \underset{0}{=} \dfrac{\circ(x)}{x} = \circ(1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Conclusion : $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et préciser } g'(0) = 0.}$

8) On suppose $f : x \mapsto |x|$.
Pour $x > 0$, on a

$$g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} |t|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{0} (-t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_{0}^{x} t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{4} + \frac{x}{4} = \frac{x}{2},$$

donc, comme $g$ est paire sur $\mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{|x|}{2}.}$$

On constate que $g$ est dérivable à gauche de $0$ avec $g'_g(0) = -1/2$ et que $g$ est dérivable à droite de $0$ avec $g'_d(0) = 1/2$. Comme $g'_g(0) \neq g'_d(0)$, on en déduit bien que

$$\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$