TD N°4 : Séries

1 Nature et somme si elle converge de la série de terme général dans les cas suivants :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{5n}{2^n} - \dfrac{6}{3^{2n+1}}$
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
   (on pourra commencer par déterminer trois réels a, b, c tels que $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.)
4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
5) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n^2+n+1}{n!}$

2 Nature des séries suivantes dont le terme général est donné, pour n assez grand, par :

1) $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2$
2) $\dfrac{n^2-1}{n^4+2n^3+1}$
3) $\dfrac{2^n}{3^n+n}$
4) $\dfrac{\arctan(\pi n)}{n!}$
5) $\mathrm{e}^{2/\sqrt{n}} - 1$
6) $\dfrac{1}{3^n n!}\prod_{k=1}^{n}(3k-2)$
7) $\dfrac{1}{n} - \ln(1+\dfrac{1}{n})$

3 Soit u la suite donnée par $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$, que (u_n) est décroissante et étudier sa convergence.
2) Montrer que $\sum u_n^2$ converge et donner sa somme.
3) Montrer que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge. En déduire que $\sum u_n$ diverge.

4 1) Justifier la convergence des séries : $\sum_{p\geqslant 0} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

2) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, montrer que $\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

3) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$

5 **(Série alternée)**

1) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0.
   On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$
   a) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
   b) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
2) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$. Cette série est-elle absolument convergente ?

6 1) Montrer que

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{(k+1)} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

En déduire un encadrement de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$.

2) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

7

1. Montrer que la série de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ converge. En déduire la convergence de la suite $p_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, une suite à termes positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

On pose $\sigma_p = \sum_{k=1}^{2^p} u_k$ pour $p \geqslant 0$.

a) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sigma_p \leqslant (1+\frac{1}{2^{p-1}})\sigma_{p-1}$

b) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}, \ \sigma_p \leqslant u_1 \prod_{k=0}^{p-1}(1+\frac{1}{2^k})$, puis que $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée.

c) Montrer que finalement $\sum u_n$ converge.

Correction :

2. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{2^p} u_k = \sum_{k=1}^{2^{p-1}} u_k + \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2\times 2^{p-1}} u_k$$
$$= \sigma_{p-1} + \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2\times 2^{p-1}} u_k$$

Dans la deuxième somme, on applique l'inégalité de l'énoncé avec $n = 2^{p-1}$, on obtient ainsi :

$$\sum_{k=2^{p-1}+1}^{2\times 2^{p-1}} u_k \leqslant \frac{1}{2^{p-1}} \underbrace{\sum_{k=1}^{2^{p-1}} u_k}_{\sigma_{p-1}}$$

Donc il vient que : $\sigma_p \leqslant \sigma_{p-1} + \frac{1}{2^{p-1}}\sigma_{p-1}$.

D'où $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sigma_p \leqslant (1+\frac{1}{2^{p-1}})\sigma_{p-1}}$

b) Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $Q(p)$: « $\sigma_p \leqslant u_1 \prod_{k=0}^{p-1}(1+\frac{1}{2^k})$ » est vraie.

- $p = 0$: $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{1} u_k = u_1$ et $u_1 \prod_{k=0}^{p-1}(1+\frac{1}{2^k}) = u_1$ (un produit vide vaut 1)
  Donc $Q(0)$ est vraie.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $Q(p)$ est vraie. Montrons que $Q(p+1)$ est vraie.
  On sait d'après la question précédente que :

$$\sigma_{p+1} \leqslant (1+\frac{1}{2^p})\sigma_p$$

  En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient que :

$$(1+\frac{1}{2^p})\sigma_p \leqslant (1+\frac{1}{2^p})u_1\prod_{k=0}^{p-1}(1+\frac{1}{2^k})$$

  Donc $\sigma_{p+1} \leqslant u_1 \prod_{k=0}^{p}(1+\frac{1}{2^k})$ et $Q(p+1)$ est vraie.
  Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}$, $Q(p)$ est vraie.

De plus, la suite (p_n) est croissante.
En effet , $\forall n \in \mathbb{N}, \ p_n > 0$ et $\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 1$ donc $p_{n+1} \geqslant p_n$.
Comme (p_n) converge, alors (p_n) est majorée par sa limite e^{ℓ}.
D'où $\forall p \in \mathbb{N}, \sigma_p \leqslant u_1 \mathrm{e}^{\ell}$.
Conclusion $\boxed{(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Dans un premier temps, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant 2^k$.

Alors $S_n \leqslant \sigma_n$ car $\sigma_n - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2^n} u_k \geqslant 0$ (somme de termes positifs)

Donc $S_n \leqslant u_1 \, \mathrm{e}^{\ell}$.

Ainsi la suite (S_n) des sommes partielles de la série de terme général u_n , qui est à termes positifs, est majorée.

Donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$ (voir la proposition 6 du cours)