CH5 : PROBABILITÉS - FICHE MÉTHODE

LANGAGE PROBABILISTE	LANGAGE ENSEMBLISTE
Univers des résultats possibles Ω	Ensemble Ω
une éventualité ou un résultat possible	un élément de Ω
un événement	une partie de Ω
événement impossible	$\varnothing$
événement certain	Ω
événement contraire de A	complémentaire de A
événement A ou B	$A \cup B$
événement A et B	$A \cap B$
A et B incompatibles	$A \cap B = \varnothing$
A implique B	$A \subset B$
$(A_k)_{k\in K}$ système complet d'événements	$(A_k)_{k\in K}$ partition de Ω (A_k non vide)

quasi-certain ou négligeable

- Si A est possible et que $P(A) = 0$ alors A est négligeable (ou quasi-impossible).
- Si $A \neq \Omega$ et que $P(A) = 1$,on dit que A est quasi-certain.

I Autour d'un SCE

Qu'est-ce qu'un système complet d'évènements ?

$(A_k)_{k\in K}$ une famille d'événements ($K \subset \mathbb{N}$) forme un système complet d'événements de probabilité non nulle si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- Pour $i \neq k$, $A_i \cap A_k = \varnothing$
- $\displaystyle\bigcup_{k\in K} A_k = \Omega$

Comment le reconnaît-on ?

En général, un système complet d'événements est caché dans l'énoncé :

- Trois machines A, B, C produisent des pièces. Les événements "Une pièce provient de la machine A", "Une pièce provient de la machine B" et "Une pièce provient de la machine C" forment un SCE
- On peut en construire un à partir d'une variable aléatoire : si X est une variable aléatoire discrète alors $(X = x)_{x\in X(\Omega)}$ est un SCE

Comment l'utilise-t-on ? Formule des probabilités totales

Pour calculer la probabilité d'un événement lorsqu'il y a plusieurs niveaux de hasard, vous devez penser à appliquer la formule des probabilités totales :
Soit $(A_k)_{k\in K}$ ($K \subset \mathbb{N}$) un système complet d'événements (de probabilités toutes non nulles si on veut utiliser la deuxième partie de la formule),
alors quelque soit l'événement B :

$$P(B) = \sum_{k\in K} P(A_k \cap B) = \sum_{k\in K} P_{A_k}(B)P(A_k)$$

Formule à remonter le temps : Formule de Bayes

Soit B un événement (" du futur ") de probabilité non nulle.
Soit $(A_k)_{k\in K}$ un système complet d'événements ($K \subset \mathbb{N}$).
Alors on a :

$$\forall k \in K,\ P(A_k/B) = P_B(A_k) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P_{A_k}(B) \times P(A_k)}{\sum\limits_{n\in K} P_{A_n}(B)P(A_n)}$$

Quand utiliser cette formule ?

Cette formule correspond à une démarche inductive : à partir d'une observation on "remonte" dans le temps et on essaye de voir ce qui s'est passé avant.
Par exemple, on a une pièce défectueuse et on cherche la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A

II Probabilité d'une union d'événements

Soit $(A_k)_{k\in K}$ une famille événements ($K \subset \mathbb{N}$). On cherche à calculer la probabilité qu'au moins un des événements A_k se réalise, c'est à dire

$$P(\bigcup_{k\in K} A_k)$$

Union disjointe ou pas ?

- Si l'union est disjointe, $P(\bigcup\limits_{k\in K} A_K) = \sum\limits_{k\in K} P(A_k)$
- Si l'union n'est pas disjointe pour deux événements, on applique la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

III Probabilité d'une intersection finie d'événements

Soit $A_1, ...A_n$ n événements. On cherche à calculer la probabilité que tous les événements A_k se réalisent, c'est à dire :

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k)$$

Indépendance mutuelle ou pas ?

- Si les événements sont mutuellement indépendants, alors $P(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k) = \prod\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$.
- Si les événements ne sont pas mutuellement indépendants, alors on applique la formule des probabilités composées :
  Si $P(A_1 \cap A_2, .. \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors

$$P(A_1 \cap A_2 .. \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$