CH 5 : PROBABILITÉS

Table des matières

I Rappels du Vocabulaire

LANGAGE PROBABILISTE	LANGAGE ENSEMBLISTE
Univers des résultats possibles Ω	Ensemble Ω
une éventualité ou un résultat possible	un élément de Ω
un événement	une partie de Ω
événement impossible	$\varnothing$
événement certain	Ω
événement contraire de A	complémentaire de A
événement A ou B	$A \cup B$
événement A et B	$A \cap B$
A et B incompatibles	$A \cap B = \varnothing$
A implique B	$A \subset B$
$(A_k)_{k\in K}$ système complet d'événements	$(A_k)_{k\in K}$ partition de Ω

Définition 1

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E.

$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N}/x \in A_n$ Ainsi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est réalisé ssi au moins un des A_n est réalisé.

$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}/x \in A_n$ Ainsi, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est réalisé ssi tous les A_n sont réalisés.

Proposition 1

<u>**Distributivité**</u> : $B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n)$ et $B \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B \cup A_n)$

<u>**Lois de Morgan**</u> : $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ et $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$

II Espace probabilisé

Soit Ω un univers quelconque (fini ou infini) lié à une expérience aléatoire. On rappelle qu'une partie de Ω est un sous-ensemble de Ω.
Dans la suite du chapitre, K **désignera un sous-ensemble de** $\mathbb{N}$ fini ou dénombrable, c'est à dire K peut-être de cardinal fini , par exemple $K = \{1, \cdots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), K peut-être dénombrable par exemple $K = \mathbb{N}$, $K = \mathbb{N}^*$ etc...

1 Tribu

Définition 2 - Tribu

✓ On appelle tribu sur Ω, ou σ-algèbre sur Ω, tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant:
- Ω appartient à $\mathcal{T}$,
- $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire : Pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\overline{A} \in \mathcal{T}$,
- $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable:
  Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ appartient à $\mathcal{T}$.

✓ Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés des **événements**.
✓ Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé **espace probabilisable**.

Exemple 1 **:**
a) $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu, mais elle n'est pas intéressante car elle ne permet de considérer que l'événement impossible et l'événement certain.
b) Si $A \subset \Omega$, $\left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ est aussi une tribu.
c) Si Ω est fini ou dénombrable, alors $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω est une tribu.

Proposition 2

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de Ω.
- $\varnothing \in \mathcal{T}$.
- Si A et B sont deux événements de $\mathcal{T}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont dans $\mathcal{T}$.
- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$.

Remarque : Ainsi une union ou une intersection finie ou dénombrable d'événements est un événement.

A retenir

- Si $\Omega = \{x_1, \cdots, x_n\}$ est fini, alors $\mathcal{T}$ est l'ensemble des parties de Ω, .
  Par exemple : Résultat d'un lancer de dé : $\Omega = \{1, \cdots, 6\}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}([\![1, 6]\!])$.
- Si $\Omega = \{w_i, i \in I\}$ est dénombrable (I est dénombrable), alors $\mathcal{T}$ est l'ensemble des parties de Ω.
  Par exemple, on lance un dé jusqu'à obtenir un 6 : $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$
- Si Ω est infini et non dénombrable. $\mathcal{T}$ est difficile à expliciter mais on admettra que $\mathcal{T}$ possède les propriétés de la définition 2 et ce n'est pas l'objet de ce chapitre.
  Par exemple, un nombre réel au hasard dans $[0, 1]$, durée de vie d'un composant.

2 Probabilité

Définition 3 - Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité toute application $P : \mathcal{T} \to [0,1]$ vérifiant:

- $P(\Omega) = 1$
- P est $\sigma-$ additive, c'est à dire que si $(B_k)_{k\in K}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements 2 à 2 **incompatibles**, alors
$$P(\bigcup_{k\in K} B_k) = \sum_{k\in K} P(B_k).$$

L'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ muni d'une probabilité P est appelé espace probabilisé et $P(A)$ est la probabilité de l'événement A.

Remarques : Pour le deuxième point ($\sigma-$ additivité) :
1) Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.
1) Si $(B_1, \cdots, B_n)$ est une famille finie d'événements deux à deux incompatibles, alors $P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$.
2) Si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles, $\sum_{k\geqslant 0} P(B_k)$ est une série à termes positifs convergente et $P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k)$.

Propriété 1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

- $P(\varnothing) = 0$.
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $A \subset B$ alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ et $P(A) \leq P(B)$.
  On dit que l'application P est croissante.
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Corollaire 1

Pour tout couple d'événements (A, B) de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $P(A\cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

Définition 4 - négligeable-presque sûr

Soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

- Si $P(A) = 0$ et $A \neq \varnothing$, on dit que A est **négligeable** ou **quasi-impossible**.
- si $P(A) = 1$ et $A \neq \Omega$, on dit que A est **presque sûr** ou **quasi-certain**.

3 Autour d'un système complet d'événements

Définition 5 - Système complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
$(A_k)_{k\in K}$ une famille d'événements ($K \subset \mathbb{N}$) forme un système complet d'événements si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- Pour $i \neq k$, $A_i \cap A_k = \varnothing$,
- $\bigcup\limits_{k\in K} A_k = \Omega$.

Exemple 2 :

a) Lors d'une épreuve sportive qui se dispute en plusieurs jeux, deux joueurs A et B s'affrontent. Le joueur ayant remporté deux jeux consécutifs est déclaré vainqueur et l'épreuve s'arrête alors. A chaque jeu, les événements "A est vainqueur ", "B est vainqueur" et "le jeu continue" forment un système complet d'événements.

b) Si l'univers est fini, $\Omega = \{\omega_k,\ k \in [\![1, n]\!]\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), alors la famille $(\{w_1\}, .. \{w_n\})$ forme un système complet d'événements.

c) Soit $\Omega = \{\omega_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. La famille $(\{\omega_k\})_{k\in\mathbb{N}}$ des singletons est un système complet d'événements.

Proposition 3

Soit $(A_k)_{k\in K}$ un système complet d'événements ($K \subset \mathbb{N}$) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Alors :

$$\sum_{k\in K} P(A_k) = 1.$$

Remarques :

- Pour tout système complet fini d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1.$$
- Pour tout système complet dénombrable d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$,
$$\text{la série de terme général } P(A_k) \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = 1.$$

4 Cas d'équiprobabilité

Définition 6 - probabilité uniforme

Pour tout univers Ω fini, la probabilité définie par :

$$\text{pour tout événement A,}\ P(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)},$$

est appelée la probabilité uniforme sur Ω.

Remarque : La définition a bien un sens car :
Notons $\Omega = \{w_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
La famille $(\{w_1\}, \cdots, \{w_n\})$ forme un système complet d'événements. Donc on a :
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(\{w_k\}) = \dfrac{1}{n}$ et pour tout événement A, $P(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{n} = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$.
On peut alors vérifier les propriétés d'une probabilité en utilisant les propriétés sur les cardinaux.

Exemple 3 : ♥Dans un jeu de 32 cartes :
a) On tire au hasard trois cartes simultanément : Calculer la probabilité d'obtenir deux coeurs exactement, au moins un coeur.
b) On tire trois cartes successivement et sans remise : Calculer les mêmes probabilités.

III Probabilités conditionnelles, composées, totales et Formule de Bayes

Dans ce paragraphe et le suivant, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé et tout événement est un élément de la tribu $\mathcal{T}$.

Définition 7 - Probabilité conditionnelle

Soit A un événement de probabilité non nulle, on appelle probabilité de B sachant A ou conditionné par A, le réel noté $P(B/A)$ ou $P_A(B)$ défini par :

$$P(B/A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Proposition 4

L'application $P_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & P_A(B) \end{array}$ est une probabilité sur Ω.

Propriété 2 - Formule des probabilités composées

Soient $(B_1, \dots, B_n)$ une famille finie d'événements telle que $P(B_1 \cap B_2, .. \cap B_{n-1}) \neq 0$.

$$\text{Alors } P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \cdots \times P_{\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} B_k}(B_n).$$

Théorème 1 - Formule des probabilités totales

Soit $(A_k)_{k\in K}$ **un système complet d'événements** ($K \subset \mathbb{N}$) tel que $\forall k \in K, P(A_k) \neq 0$.

Alors pour tout événement B, $P(B) = \sum\limits_{k\in K} P(A_k \cap B) = \sum\limits_{k\in K} P_{A_k}(B)P(A_k)$.

Démonstration : $\square$

Remarques : • Pour tout système complet fini d'événements $(A_1, \cdots, A_n)$, on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k).$$

• Pour tout système complet dénombrable d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} P(A_k \cap B)$ converge et $P(B) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k \cap B) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(B)P(A_k)$.

Exemple 4 : ♥ Tous les midis, Mme Richter mange soit à la cantine du lycée soit au restaurant.
On suppose que si au jour n, Mme Richter mange au restaurant, alors au jour $n+1$, elle a trois chances sur 4 de manger à la cantine.
D'autre part, si au jour n, Mme Richter mange à la cantine, alors au jour $n+1$, elle a 2 chances sur 3 de manger à la cantine. Au premier jour, Mme Richter mange au restaurant.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité p_n pour que Mme Richter mange au restaurant au $n^{\text{ème}}$ jour ? Montrer que la suite (p_n) converge et déterminer sa limite.

Exemple 5 : ♥ Un logiciel informatique permet de tirer un nombre entier k de manière aléatoire telle que la probabilité de l'événement A_k : " obtenir le nombre k" vaille $\dfrac{1}{k!e}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Quand on a obtenu l'entier k, on tire une boule dans une urne contenant k boules blanches et une boule noire.
Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

Définition 8 - quasi-complet

On appelle système quasi complet d'événements une suite $(A_k)_{k\in K}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = 1$.

Remarque : On peut avoir $P(A_k) = 0$ pour certaines valeurs de k.

Proposition 5

Soit $(A_k)_{k\in K}$ **un système quasi-complet d'événements**. On a alors :
pour tout événement B, $P(B) = \sum\limits_{k\in K} P_{A_k}(B)P(A_k)$,

avec la convention suivante : si $P(A_k) = 0$, alors on pose $P_{A_k}(B)P(A_k) = 0$. (i.e La formule des probabilités totales reste valable.)

Théorème 2 - Formule de Bayes ou formule à remonter le temps

Soit $(A_n)_{n\in K}$ un système complet fini ou dénombrable d'événements qui sont tous de probabilité non nulle .

Si B est un événement, de probabilité non nulle, alors

$$\forall k \in K, \quad P_B(A_k) = \frac{P(B\cap A_k)}{P(B)} = \frac{P_{A_k}(B)\times P(A_k)}{\sum\limits_{n\in K} P_{A_n}(B)P(A_n)}.$$

Exemple 6 **:** ♥ Deux équipes de football A et B sont à égalité à l'issue d'un match. Pour les départager, on décide de tirer au sort l'un des joueurs de l'équipe A et de lui faire tirer un pénalty contre l'équipe B.
On évalue à 0.4 la probabilité de succès du goal de l'équipe A et à 0.7 la probabilité de succès de chacun des 10 autres membres de l'équipe A.
L'équipe A gagne. Quelle est la probabilité pour que le pénalty ait été tiré par le goal de l'équipe A.(*Pour rappel, une équipe de football est composée de 11 joueurs.*)

IV Indépendance

1 Pour deux événements

Définition 9

Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$.

Remarque :
1) Si $P(A) = 0$, alors $P(A\cap B) = 0$ et A et B sont indépendants.

2) Si A et B sont incompatibles et non négligeables, alors ils ne peuvent pas être indépendants.

Exemple 7 **:**

- **lancers successifs**
  Quand on jette n fois de suite un dé ou une pièce, deux résultats relatifs à des numéros de lancers différents sont indépendants.
- **tirages avec remise**
  Quand on tire avec remise dans une urne, deux résultats relatifs à des numéros de tirage différents sont indépendants.

Proposition 6

Soit A un événement de probabilité non nulle et B un événement.

A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Proposition 7

Si A et B sont deux événements indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B , $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2 Indépendance de n événements

Définition 10 - Indépendance 2 à 2

Soit $(B_1, \ldots, B_n)$ une famille finie d'événements.
On dit qu'ils sont 2 à 2 indépendants si et seulement si $\forall (i, j) \in ([\![1, n]\!])^2$ tels que $i \neq j$, B_i et B_j sont indépendants.

Définition 11 - Indépendance mutuelle

Soit $(B_1, \ldots, B_n)$ une famille finie d' événements.

On dit que les B_k sont mutuellement indépendants ou indépendants si et seulement si

$$\forall I \subset [\![1, n]\!],\ P(\bigcap_{i\in I} B_i) = \prod_{i\in I} P(B_i)$$

Exemple 8 **:** Que signifie "A,B,C sont mutuellement indépendants"?

Remarque **:** L'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2. Mais attention la réciproque est fausse.

3 Indépendance d'une suite d'événements

Définition 12

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

On dit que (B_n) est une suite d'événements **mutuellement indépendants** si pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I} P(B_i).$$

Indépendances classiques : • Dans une série de lancers d'un dé ou d'une pièce, des événements relatifs à des numéros de lancers différents sont indépendants.

• Dans une série de tirages avec remise dans une urne, des événements relatifs à des numéros de tirages différents sont indépendants.