CH 6 : Variables aléatoires réelles discrètes

Table des matières

I Qu'est-ce qu'une variable aléatoire réelle ?

Définition 1 - Variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$, un espace probabilisable.
On appelle variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant a\}$, noté $(X \leqslant a)$, soit un événement, c'est à dire un élément de la tribu $\mathcal{T}$.

Proposition 1 - Évènements définis à partir de X

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors

$$(X \in I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \text{ est un événement.}$$

__Notations :__ On peut écrire les événements de la manière suivante : $(X = x)$ ou $[X = x]$ ou $\{X = x\}$, $(X \leqslant x)$ ...

Exemple 1 **:** $(2 < X \leqslant 4)$, $(X \geqslant 2)$, $(|X| \leqslant 2) = (-2 \leqslant X \leqslant 2)$ et $(X = 0)$ sont des événements.

Définition 2 - Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{T})$, la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Propriété 1

F_X possède les propriétés suivantes :

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout x de $\mathbb{R}$. De plus,
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, P(X = x) = F_X(x) - P(X < x) = F_X(x) - \lim_{t \to x^-} F_X(t).$$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Remarque : Nous donnerons des exemples de fonction de répartition plus tard dans le cours.

Avoir même loi

On dit que deux var suivent la même loi si elles ont la même fonction de répartition.
Autrement dit, la fonction de répartition caractérise la loi.

II Qu'est ce qu'une variable aléatoire réelle discrète (Vard)

Définition 3 - Variable aléatoire réelle discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$, un espace probabilisable.
Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est inclus dans un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathbb{R}$ indexé par une partie de $\mathbb{N}$.

Remarque : Autrement dit si $X(\Omega)$ est **fini** ou **dénombrable**, le mot dénombrable n'étant pas un terme exigible, X est une variable aléatoire discrète.

Remarque : $X(\Omega)$ est appelé **univers-image** de X, l'ensemble des valeurs prises par X, c'est à dire

$$X(\Omega) = \{k \quad / \quad P(X = k) \neq 0\}.$$

- Si $X(\Omega)$ est **fini** (de cardinal fini), on dit que X est variable aléatoire discrète **finie**.
- Si $X(\Omega)$ est **dénombrable**, on dit que X est variable aléatoire discrète **infinie**.

Par conséquent, $X(\Omega) = \{x_j,\ j \in J\}$ avec J une partie de $\mathbb{N}$, par exemple $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Exemple 2 : Déterminer $X(\Omega)$ dans les cas suivants :

a) Un joueur lance deux fois de suite un dé. On note X la somme des deux résultats obtenus.

b) ♥On effectue une succession de lancers d'un dé jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

Exemple des fonctions indicatrices

Soit $A \subset \Omega$. On appelle fonction indicatrice de A, l'application donnée par :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{1}_A : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases} \end{array}$$

On a les règles de calculs suivantes pour A, B deux sous-ensembles de Ω :

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
3. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

Exemple 3 : Soit A un événement.
$\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire discrète finie et $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$

III Loi de probabilité et fonction de répartition

1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition 4 - Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
La **loi (de probabilité)** de X est l'application f_X de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ associant à tout x de $X(\Omega)$ le nombre $P(X = x)$.

Remarque : Donner la loi de X signifie donner : $X(\Omega) \quad$ et $\quad \forall x \in X(\Omega),\ P(X = x)$.

Exemple 4 : **Variable aléatoire réelle constante :** $X : \begin{array}{c}\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto a\end{array}$, où a est un réel. On a $P(X = a) = 1$

Exemple 5 : ♥Soit A un événement. Donner la loi de $\mathbb{1}_A$.

Exemple 6 : ♥On lance indéfiniment un dé et on note X le rang d'apparition du premier 6. Déterminer la loi de X.

2 Système complet d'événements lié à une var discrète et utilisation pour déterminer F_X sa fonction de répartition

Proposition 2 - SCE défini à partir de X

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
La famille $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Remarques : Par conséquent,

1. $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$,
2. $\forall k \in X(\Omega),\ 0 \leqslant P(X = k) \leqslant 1$.
3. On peut donc utiliser $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ comme système complet d'événements pour appliquer la formule des probabilités totales.

Exemple 7 : ♥Donner un SCE avec les variables aléatoires discrètes définies dans les exemples 5 et 6. De plus, vérifions qu'avec la loi de l'exemple 6, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

Expression de $P(X \leqslant y)$ ou $P(X > y)$

- $P(X \leqslant y) = P(\bigcup\limits_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leqslant y}} (X = k)) = \sum\limits_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leqslant y}} P(X = k)$ (union disjointe).
- $P(X > y) = P(\bigcup\limits_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k > y}} (X = k)) = \sum\limits_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k > y}} P(X = k) = P(\overline{(X \leqslant y)}) = 1 - P(X \leqslant y)$.

Propriété 2 - Fonction de répartition d'une vard

Soit J un sous ensemble de $\mathbb{N}$ et $X(\Omega) = \{x_j,\ j \in J\}$ avec les x_j rangés dans l'ordre croissant.

- $\forall y \in \mathbb{R},\ F_X(y) = P(X \leqslant y) = \sum\limits_{\substack{x_j \in X(\Omega) \\ x_j \leqslant y}} P(X = x_j)$.
- $F_X(x_{j+1}) - F_X(x_j) = P(X = x_{j+1})$ pour tout $j \in J$.
- F_X est constante sur l'intervalle $[x_j; x_{j+1}[$ (la fonction est en escalier)
- F_X est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- Pour tout réel a et b, $P([a < X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

Démonstration : démontrons le deuxième point :

$\square$

Exemple 8 **:** Déterminons et traçons la fonction de répartition et la loi d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{4}$ et d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,3]\!])$

Remarque : Il est parfois plus simple de déterminer la fonction de répartition F_X pour obtenir la loi d'une var discrète, c'est le cas notamment pour la loi d'un inf ou d'un min et d'un sup ou d'un max, bien étudier l'exemple suivant.

Exemple 9 **:** ♥Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On en tire deux avec remise, et on note X le plus petit des deux numéros obtenus et Y le plus grand. Déterminer la loi de X et celle de Y.

3 Construction d'une variable aléatoire discrète

Proposition 3

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de réels deux à deux distincts et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,
  alors il existe une variable aléatoire discrète X vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!], P(X = x_i) = p_i$.
- Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts et $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} p_i$ **est une série convergente et a pour somme** 1,
  alors il existe une variable aléatoire discrète X vérifiant $\forall i \in \mathbb{N}, P(X = x_i) = p_i$.

Exemple 10 **:** ♥On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $p_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \dfrac{4}{n}p_{n-1}$.
Déterminer le réel a tel que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définisse une loi de probabilité. Définir une variable aléatoire discrète ayant cette loi.

IV Espérance et Moment

1 Espérance

Définition 5 - Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète.
On dit que X admet une espérance si $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$ est une somme finie de termes ou une série **absolument convergente**.

Lorsque $E(X)$ existe, $E(X) = \sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$.

Remarques :
1) L'espérance d'une variable aléatoire discrète finie existe toujours, son espérance est une somme finie de termes.
2) L'espérance est la moyenne des valeurs prises par X pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur.
3) Pour une **série à termes positifs**, l'absolue convergence revient à la convergence.

Exemple 11 **:** ♥Dans les cas suivants, écrire l'espérance lorsqu'elle existe :

a) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ b) $X(\Omega) = [\![3,10]\!]$ c) $X(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{k}, k \in [\![1,n]\!]\right\}$
d) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ e) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ f) $X(\Omega) = \{k, k \geqslant 3\}$

Exemple 12 **:** Soit A un événement, calculer $E(\mathbb{1}_A)$.

Exemple 13 **:** Calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 14 **:** ♥Déterminer si $E(X)$ existe et si oui la calculer pour X une variable aléatoire dont la loi est donnée par : $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = p(1-p)^{n-1} \end{cases}$ $(p \in]0,1[)$.

Exemple 15 **:** ♥Soit X une variable aléatoire telle que :
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. X admet-elle une espérance ?

Propriété 3 - linéarité

Soit X et Y deux vard sur Ω admettant chacune une espérance alors :
Pour tous réels α et β, $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$

Remarques :

- Si X est presque sûrement égale à a, alors $E(X) = a$.
- Si X admet une espérance et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
  alors $aX + b$ admet une espérance et $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- Si $X_1, \cdots, X_n$ admettent chacune une espérance, alors
  pour tous réels $a_1, \cdots, a_n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$ admet une espérance et $E(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

Propriété 4 - positivité-croissance

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω admettant une espérance.
- Si X est positive , alors $E(X) \geq 0$.
- Si $X \leqslant Y$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Remarque : Cette propriété permet de vérifier la cohérence des résultats obtenus.

Définition 6 - Variable aléatoire discrète centrée

Toute variable aléatoire discrète admettant une espérance nulle est dite **centrée.**

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance.
Alors la variable aléatoire $X - E(X)$ est une variable aléatoire discrète centrée appelée **la variable aléatoire centrée associée à** X.

2 Théorème de transfert ou $E(u(X))$

Théorème 1 - Théorème de transfert

Soit X une vard sur Ω et u une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Alors
- $u(X)$ est une variable aléatoire discrète.
- $E(u(X))$ existe si et seulement si $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} u(k)P(X = k)$ est une somme finie de termes ou une série converge absolument.
  En cas d'existence, $E(u(X)) = \sum\limits_{k \in X(\Omega)} u(k)P(X = k)$.

Exemple 16 **:** ♥Calculer $E(Y)$ où $Y = X(X - 1)$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = pq^k$

Exemple 17 **:** ♥Calculer $E(2^X)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

3 Variance

Définition 7

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω.

On dit que X admet une variance si $E(X)$ existe et si $(X-E(X))^2$ admet une espérance.
On appelle alors **variance de** X le réel $V(X)$ définit par :

$$V(X)=E\Big((X-E(X))^2\Big)=\sum_{k\in X(\Omega)}(k-E(X))^2P(X=k).$$

De plus lorsque $V(X)$ existe, on appelle **écart-type de** X le réel $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Remarques :

- La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de X et la moyenne de X. La variance est donc une mesure de dispersion de X par rapport à $E(X)$.
- Si X n'admet pas d'espérance, X ne peut pas admettre de variance.
- Une variance est un nombre positif. Cela permet de vérifier la cohérence des résultats.
- Une variable aléatoire finie admet toujours une variance, celle-ci correspond à une somme finie de termes.

Théorème 2 - Formule de Kœnig-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω.

$$X \text{ admet une variance ssi } E(X^2) \text{ existe.}$$

Dans ce cas, on :

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2.$$

Remarque : En général, on utilise cette formule pour calculer la variance.

D'après le théorème de transfert, $\boxed{E(X^2)=\sum_{k\in X(\Omega)}k^2P(X=k).}$

Exemple 18 : ♥Soit X la variable aléatoire définie par $\begin{cases} X(\Omega)=\mathbb{N}^* \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(X=n)=p(1-p)^{n-1}\end{cases}$ $(p\in]0,1[)$.

On a vu que X admettait une espérance égale à $\frac{1}{p}$. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Propriété 6

Si X est une variable aléatoire discrète sur Ω admettant une variance, alors

- Pour a et b deux réels, $V(aX+b)=a^2V(X)$.
- $V(X)=0$ si et seulement si X est une variable aléatoire presque surement constante ($X(\Omega)=\{c\}$ et $P(X=c)=1$).

Définition 8 - Variable aléatoire centrée réduite

Si X est une variable aléatoire discrète admettant une variance et telle que $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une variable aléatoire **centrée réduite**.

Propriété 7 - Variable aléatoire centrée réduite associée

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle.
La variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire discrète centrée réduite
On l'appelle **variable aléatoire centrée réduite associé à** X.

4 Moments d'ordre r

Définition 9 - moment d'ordre r

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X^r admet une espérance alors on dit que X admet un moment d'ordre r.
On appelle alors **moment d'ordre** r et on note $m_r(X)$ le réel

$$m_r(X) = E(X^r).$$

Remarques :

- Le moment d'ordre 1 est l'espérance.
- Une variable aléatoire finie admet des moments d'ordre r pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

D'après le théorème de transfert, on a la propriété suivante :

Propriété 8

$m_r(X)$ existe si et seulement si $\sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k)$ est une somme finie de termes ou une série absolument convergente.
En cas d'existence, $m_r(X) = E(X^r) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k)$.

Exemple 19 **:** Déterminer le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire réelles discrète X, lorsqu'il existe ?

Définition 10 - moment centrée d'ordre r

Si X admet une espérance m et si $(X - m)^r$ admet une espérance, on appelle moment centré d'ordre r:

$$\mu_r(X) = E\Big((X - m)^r\Big) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - m)^r P(X = k).$$

Exemple 20 **:** A quoi correspond la variance d'une vard lorsqu'elle existe ?

5 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Proposition 4 - Inégalité de Markov

Pour X une variable aléatoire positive ou nulle admettant une espérance, alors:

$$\forall a > 0, P(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a} E(X).$$

Démonstration :

$\square$

Proposition 5 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une var admettant un moment d'ordre 2, alors

$$\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Démonstration :

$\square$

Remarques :

1) La probabilité que X prenne une valeur distante de sa moyenne d'au moins ϵ est majorée par $\frac{V(X)}{\epsilon^2}$.
   Cette inégalité permet à nouveau de voir la variance comme une caractéristique de dispersion de la loi de X.
2) Cette majoration est "souvent" grossière.
3) "$V(X) = 0$" signifie que X est presque sûrement constante.

4) Il est intéressant d'écrire l'inégalité pour $\epsilon = k\sigma$ (où $k \in \mathbb{N}^*$ et si $\sigma \neq 0$). Il vient :

$$P(|X - E(X)| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Pour $k = 2$, $P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma) \leqslant \frac{1}{4}$ (" moins de 25% de chance de s'écarter de $E(X)$ de plus de 2σ")

Pour $k = 10$, $P(|X - E(X)| \geqslant 10\sigma) \leqslant \frac{1}{100}$ (" moins de 1% de chance de s'écarter de $E(X)$ de plus de 10σ")

V Lois usuelles

Pour programmer le hasard, on doit importer le module `random` et la partie entière est dans le module math.

1 Loi certaine (finie)

Définition 11

On dit qu'une variable aléatoire est **certaine** si elle ne prend qu'une seule valeur :

$$X(\Omega) = \{a\} \qquad \text{et} \qquad P(X = a) = 1.$$

X est donc une variable aléatoire constante, toujours égale à $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 9

Si X est une loi certaine égale à a, $\quad E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

2 Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ (finie)

Définition 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ si

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Remarque : la loi uniforme est la loi de l'équiprobabilité.

Propriété 10

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

Exemple 21 **:** On lance un dé non pipé. X est la variable aléatoire égale au numéro obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$, $E(X) = \dfrac{7}{2}$ et $V(X) = \dfrac{35}{12}$.

Situation type : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en prend une au hasard et on note X le numéro obtenu.

Code

```python
def unif(n):
    return randint(1,n)
```

Code

```python
def unifbis(n):
    return floor(n*random())+1
```

Définition 13 - Généralisation

Soient a et b deux entiers relatifs avec $a < b$. On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[\![a,b]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ si

$$X(\Omega) = [\![a,b]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![a,b]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$$

Exemple 22 **:** Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$, alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,b-a+1]\!])$.
Ecrire deux codes l'un avec et l'autre sans `randint` permettant de simuler une variable aléatoire suivant **loi uniforme** sur $[\![a,b]\!]$.

3 Loi de Bernoulli (ou indicatrice) (finie)

Définition 14

Soit $p \in [0,1]$. On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \qquad \text{et} \qquad P(X=1) = p,\ P(X=0) = 1-p.$$

Remarque : La fonction indicatrice d'un événement A est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

Propriété 11

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p \quad$ et $\quad V(X) = p(1-p) = pq \quad$ (avec $q = 1-p$).

Situation type : on considère une **épreuve de Bernoulli**, une expérience aléatoire à deux issues, succès ou échec (par exemple pile ou face, obtenir un six ou pas, obtenir une boule blanche ou pas...). On note p la probabilité d'avoir un succès et X la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Code

```
def bernoulli(p):
    if random()  <  p: # nombre réel au hasard entre 0 et 1
        X = 1
    else:
        X = 0
    return X
```

4 Loi binomiale (finie)

Définition 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit que X suit une loi **binomiale** de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad q = 1-p.$$

Remarque : La loi de Bernoulli de paramètre p correspond à la loi binomiale de paramètres 1 et p.

Propriété 12

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p) = npq$.

Propriété 13 - Situation type

Si X est la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de n répétitions de la même épreuve de Bernoulli de manière indépendante dont la probabilité de succès est p, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Code

```
def bino(n,p):
    nbsucces = 0
    for i in range(n):
         if random()  <  p: # obtenir un succès
             nbsucces += 1
    return nbsucces
```

Exemple 23 : On lance n fois un dé non pipé. X est égale au nombre de 6 obtenus. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

5 Loi géométrique (infinie)

Définition 16

Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi géométrique** de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = (1-p)^{n-1}p.$$

Remarque : On peut vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

Propriété 14

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}, \qquad \text{avec } q = 1-p.$$

Démonstration : Nous avons déjà fait ces deux démonstrations dans les exemples 14 et 18 à reprendre. □

Propriété 15 - Situation type

On considère une épreuve de Bernoulli dont le succès a pour probabilité p. On répète cette même épreuve de façon indépendante et on appelle X le rang d'apparition du premier succès. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Démonstration : On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p \in]0,1[$.
On répète cette même épreuve de façon indépendante et on appelle X le rang d'apparition du premier succès. Déterminons la loi de X.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note : S_k : « On obtient un succès lors de la $k^{\text{ème}}$ épreuve » .

- X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \ldots \cap \overline{S}_{n-1} \cap S_n)$
  $= (1-p)^{n-1}p$ (par indépendance)

Donc X suit une loi géométrique de paramètre p. □

Remarque : Montrons que l'événement N « on n'obtient aucun succès » est négligeable, c'est à dire que $P(N) = 0$.
$N = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{S}_k$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, N \subset \bigcap_{k=1}^{n} \overline{S}_k$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant P(N) \leqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{S}_k\right)$.
Par indépendance des lancers , $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{S}_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{S}_k) = (1-p)^n$.
Comme $p \in]0,1[$, $1-p \in]0,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = 0$. Ainsi, $P(N) = 0$.
Ainsi par encadrement, $\boxed{P(N) = 0.}$

On obtient ainsi le code suivant (la boucle while s'arrêtera) :

Code

```python
def geom(p):
    attente = 1 # ou attente = 0
    while random() >= p: # échec
        attente +=1
    return attente  # ou attente + 1
```

Exemple 24 **:** ♥Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On effectue des tirages avec remise dans cette urne et on note X le rang d'apparition de la première boule blanche. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

Exemple 25 **:** ♥**Classique, à bien savoir refaire**
Soit Y une variable aléatoire telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in Y(\Omega)$, $P(Y = k) = pq^k$. On note $X = Y + 1$
Déterminer la loi de X. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.

Propriété 16 - absence de mémoire ou invariance temporelle

La loi géométrique est sans mémoire : si X est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, alors

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ P_{(X>n)}(X > n+m) = P(X > m).$$

Remarque **:** Si X désigne le rang d'apparition du premier pile lors d'une succession de lancers de pièce, alors $(X > n)$ signifie qu'on n'a pas eu de pile au cours des n premiers lancers.

En prenant par exemple $n = 10$ et $m = 5$, la propriété nous dit que sachant qu'on n'a pas eu de pile au bout de 10 lancers, la probabilité de ne pas avoir de pile lors des 15 premiers lancers (donc au bout de 5 lancers supplémentaires) est la même que la probabilité de ne pas avoir de pile au bout de 5 lancers.
Donc savoir qu'on a déjà fait 10 lancers ne change pas la probabilité.

Démonstration :

□

6 Loi de Poisson (infinie)

Définition 17

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Remarque : On peut vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$ car $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \times e^{-\lambda} = 1$.

Ici, on ne dispose pas d'une situation type correspondant à la loi de Poisson. On la rencontre dans des phénomènes dits sans vieillissement (nombres d'appels téléphonique à un standard pendant une période donnée, nombre de voitures arrivant à un péage pendant une période donnée, nombre de client entrant dans un magasin pendant une période donnée). Elle décrit le comportement du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne ou espérance connue, et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précédent.
Dans les exercices, en général, si une variable aléatoire suit une loi de Poisson, l'énoncé l'indiquera explicitement.

Propriété 17

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Démonstration : $\square$

LOIS USUELLES DISCRÈTES

X **suit une loi**	$X(\Omega)$	**Loi** $(k \in X(\Omega))$	$E(X)$	$V(X)$	**Notation**
uniforme sur $[\![1, n]\!]$	$[\![1, n]\!]$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$X \hookrightarrow U([\![1, n]\!])$
Bernoulli de paramètre p	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1-p)$	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$
binomiale de paramètres n et p	$[\![0, n]\!]$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$
géométrique de paramètre p	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
de Poisson de paramètre λ	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$