TD n°6 : Variables aléatoires discrètes

Lois usuelles

1 Dans chacune des situations suivantes reconnaître une loi usuelle pour la variable aléatoire X :

1) On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes numérotées. X correspond à la hauteur de la carte choisie.
2) Un QCM comporte 30 questions offrant chacune 4 réponses possibles, une seule d'entre elles étant correcte. Un étudiant qui n'a pas révisé répond au hasard aux 30 questions. On note X le nombre de bonnes réponses.
3) Dans un étang de 500 poissons, on en marque 50. On prélève des poissons un à un avec remise du poisson dans l'eau jusqu'à ce que l'on obtienne le premier poisson marqué.

Loi de probabilité

2 Soit $p \in]0,1[$. X une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et } P(X=1) = p.$$

Déterminer la loi de $Y = \dfrac{X+1}{2}$, son espérance et sa variance.

3

1) Soit a un réel non nul. On considère la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{8}\left(\frac{2+a^n}{n!}\right).$$

Pour quelle valeur de a, la suite (p_n) définit-elle une loi de probabilité ?

2) Dorénavant, la valeur de a est celle déterminée dans la question précédente. Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = p_n$. Calculer l'espérance de X.

4 Soit X une var prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que :

- si $k = 2p$ alors $P(X=k) = \dfrac{\alpha}{2^p}$
- si $k = 2p+1$ alors $P(X=k) = \dfrac{\alpha}{2^{p+1}}$

1) Calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$.
2) Déterminer α pour que l'on ait une loi de probabilité.
3) Pour cette valeur de α , calculer si possible l'espérance et la variance de X.

5 Soit q un réel, $0 < q < 1$. On considère une variable aléatoire telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = qP(X \geqslant n).$$

1) Déterminer la loi de X.
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

6 **Loi de Pascal ou le temps d'attente du r-ème succés**.

Une bactérie a la probabilité p d'être touchée par un laser.
On envoie un rayon laser par seconde.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle est touchée r fois ($r \in \mathbb{N}^*$)

Déterminer la loi de X égale à la durée de vie de la bactérie.

7 Une puce se déplace sur l'axe des abscisses en partant de l'origine. A chaque seconde, elle saute d'une unité vers la droite avec la probabilité p ($p \in]0,1[$) ou vers la gauche avec la probabilité $1-p$. Soit Y_n le nombre de sauts vers la droite effectués après n secondes et X_n la position de la puce après n secondes.

1) Ecrire une fonction Python `position(n,p)` de paramètres p et n qui renvoie la position de la puce après n secondes.
2) Déterminer la loi de Y_n.
3) Donner une relation entre X_n et Y_n. En déduire la loi de X_n et son espérance.
4) Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ?

8 Un péage comporte m guichets. On suppose que N le nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose, de plus, que les conducteurs choisissent leur poste au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X_i, pour i variant de 1 à m, la var égale au nombre de voitures passant par le poste n°i.

1. En calculant successivement $P_{(N=n)}(X_i = k), (k, n) \in \mathbb{N}^2$, puis $P(X_i = k)$, déterminer la loi de X_i.
2. Donner sans calcul $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
3. Ecrire une fonction Python permettant de simuler l'expérience.

9

1) Soit $\lambda > 0$. Calculer les deux sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \text{ et } S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

2) Le nombre N de clients entrant dans un bar en une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Deux serveurs parient sur la parité de N. Lequel des deux a la plus grande probabilité de gagner ?

Théorème de Transfert, Bienaymé-Tchebychev

10

1) Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale de paramètre (n, p), Calculer l'espérance des variables aléatoires réelles $Y = \dfrac{1}{X+1}$ et $Z = X(X-1)$.

2) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right) \leqslant E(X+1)$.

11 On considère une suite infinie de tirages à pile ou face mutuellement indépendants.

A chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$.
Soit S_n la variable aléatoire indiquant le nombre de piles obtenus au cours des n premiers tirages et soit T_n la variable aléatoire définie par $T_n = \exp\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$

1) Préciser la loi de S_n.

2) Calculer l'espérance $E(T_n)$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n) = e^p$

12 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que les inégalités :

1) $P\left(X \leqslant \dfrac{\lambda}{2}\right) \leqslant \dfrac{4}{\lambda}$ 2) $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$

Une autre expression de l'espérance

13 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et soit X une var aléatoire réelle prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$$

2) On suppose que la var X admet une espérance $E(X)$. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant nP(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$$

En déduire que la série de terme général $P(X > n)$ converge, et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = E(X)$$

3) On suppose que la série de terme général $P(X > n)$ converge. Montrer que la série de terme général $nP(X = n)$ converge et que X admet une espérance.

4) Enoncer le théorème qui vient d'être établi.

ECRIT AGRO 2019

14 On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On suppose les lancers indépendants.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on notera F_n l'événement "au n-ème lancer on obtient un face"
On considère la variable aléatoire T égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face.

1) Donner la loi de T, son espérance et sa variance.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(T > n)$.
3) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^*$. Comparer $P(T > n + m | T > n)$ et $P(T > m)$ et donner une interprétation.

On considère la variable aléatoire S égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier double face, c'est-à-dire deux faces consécutifs. On a donc $S \geq 2$ et S est égal à 3 si et seulement si on a obtenu un pile suivi de deux faces aux trois premiers lancers.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = P(S = n)$ et $q_n = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$.

4) Déterminer p_1, p_2, p_3 et p_4 puis q_1, q_2, q_3 et q_4.
5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la probabilité de l'événement $(S > n)$ en fonction de q_n.
6) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in [0, 1]$ puis que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $p_{n+3} = q_n/8$ puis que $q_{n+3} = q_{n+2} - q_n/8$.
8) En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n\in N^*}$ et en donner une interprétation.

On dit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.
Dans notre cas, on peut se ramener à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

9) Démontrer que pour tout entier n non nul, on a $q_{n+2} = \dfrac{q_{n+1}}{2} + \dfrac{q_n}{4}$.
10) Déterminer les racines du polynôme $X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4}$.

    On les notera r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$.
11) Justifier qu'il existe des réels A et B tels que :

$$\begin{cases} A\,r_1 + B\,r_2 &= q_1 \\ A\,r_1^2 + B\,r_2^2 &= q_2 \end{cases}$$

12) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$.
13) Donner un équivalent de q_n quand n tend vers $+\infty$.

    Cet équivalent pourra faire intervenir a, B, r_1, r_2 et n.