CH6 : VARD - FICHE RÉSUMÉ

I L'essentiel du cours

Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

La **loi (de probabilité)** de X est l'application f_X de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ associant à tout x de $X(\Omega)$ le nombre $P(X = x)$.

Remarque : Donner la loi de X signifie donner : $X(\Omega)$ et $\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x)$.

SCE défini à partir de X

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
La famille $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
Par conséquent, $\sum\limits_{k \in X(\Omega} P(X = k) = 1$.

Remarque : Pour $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $(X = k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est un SCE et $\sum\limits_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$

Pour $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $(X = k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un SCE et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$

Fonction de répartition d'une vard

Soit J un sous ensemble de $\mathbb{N}$ et $X(\Omega) = \{x_j,\ j \in J\}$ avec les x_j rangés dans l'ordre croissant.

- $\forall y \in \mathbb{R},\ F_X(y) = P(X \leqslant y) = \sum\limits_{\substack{x_j \in X(\Omega) \\ x_j \leqslant y}} P(X = x_j)$.
- $F_X(x_{j+1}) - F_X(x_j) = P(X = x_{j+1})$ pour tout $j \in J$.
- F_X est constante sur l'intervalle $[x_j ; x_{j+1}[$ (la fonction est en escalier)
- F_X est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- Pour tout réel a et b, $P([a < X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

Remarque : $F_X(x_j) = P(X \leqslant x_j) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_j) = \sum\limits_{k=1}^{j} P(X = x_k)$.

Construction de variable aléatoires discrète

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de réels deux à deux distincts et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,
  alors il existe une variable aléatoire discrète X vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!], P(X = x_i) = p_i$.
- Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts et $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} p_i$ **est une série convergente et a pour somme** 1,
  alors il existe une variable aléatoire discrète X vérifiant $\forall i \in \mathbb{N}, P(X = x_i) = p_i$.

Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète.
On dit que X admet une espérance si $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$ est une somme finie de termes ou une série **absolument convergente**.

Lorsque $E(X)$ existe, $E(X)=\sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$.

Remarque : Pour $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$, $E(X)$ existe et $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{n} kP(X=k)$.

Pour $X(\Omega)=\mathbb{N}$, sous réserve d'existence, $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$.

Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux vard sur Ω admettant chacune une espérance alors :

- **linéarité :** Pour tous réels α et β, $E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$,
- **positivité :** Si X est positive , alors $E(X)\geq 0$,
- **croissance :** Si $X\leqslant Y$, alors $E(X)\leqslant E(Y)$.

Théorème de transfert

Soit X une vard sur Ω et u une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Alors

- $u(X)$ est une variable aléatoire discrète.
- $E(u(X))$ existe si et seulement si $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} u(k)P(X=k)$ est une somme finie de termes ou une série converge absolument.
  En cas d'existence, $E(u(X))=\sum\limits_{k\in X(\Omega)} u(k)P(X=k)$.

Variance-Formule de Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω.
On dit que X admet une variance si $E(X)$ existe et si $(X-E(X))^2$ admet une espérance.
On appelle alors **variance de** X le réel $V(X)$ définit par :

$$V(X)=E\big((X-E(X))^2\big)=\sum_{k\in X(\Omega)}(k-E(X))^2P(X=k).$$

De plus lorsque $V(X)$ existe, on appelle **écart-type de** X le réel $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Formule de Kœnig-Huygens : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$.

Remarque : On peut aussi calculer $E(X(X-1))$ pour calculer $E(X^2)$, parfois plus simple.

Remarque : Une variable aléatoire est dit centrée et réduite si $E(X)=0$ et $V(X)=1$

Propriétés de la variance

Si X est une variable aléatoire discrète sur Ω admettant une variance, alors

- Pour a et b deux réels, $V(aX+b) = a^2V(X)$.
- $V(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire presque surement constante ($X(\Omega) = \{c\}$ et $P(X = c) = 1$).
- $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est la variable centrée réduite associée à X.

moment d'ordre r

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X^r admet une espérance alors on dit que X admet un moment d'ordre r.

On appelle alors **moment d'ordre** r et on note $m_r(X)$ le réel $m_r(X) = E(X^r)$.

Remarque : Pour $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $m_r(X)$ existe et $m_r(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^r P(X = k)$.

Pour $X(\Omega) = \mathbb{N}$, sous réserve d'existence, $m_r(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k^r P(X = k)$.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

- **Markov :** Pour X une variable aléatoire positive ou nulle admettant une espérance, alors :
$$\forall a > 0, P(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a}E(X).$$
- **Bienaymé-Tchebychev :** Soit X une var admettant un moment d'ordre 2, alors
$$\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

LOIS USUELLES DISCRÈTES

X **suit une loi**	$X(\Omega)$	**Loi** ($k \in X(\Omega)$)	$E(X)$	$V(X)$	**Notation**
uniforme sur $[\![1, n]\!]$	$[\![1, n]\!]$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$X \hookrightarrow U([\![1, n]\!])$
Bernoulli de paramètre p	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1-p)$	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$
binomiale de paramètres n et p	$[\![0, n]\!]$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$
géométrique de paramètre p (loi sans mémoire)	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
de Poisson de paramètre λ	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Absence de mémoire pour une vard géométrique

si X est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, alors

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ P_{(X>n)}(X > n+m) = P(X > m).$$

On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X > n) = q^n$.

Remarque : Cette démonstration est à connaître.

II Les savoir-faire

- Trouver la loi d'une variable aléatoire discrète.
- Savoir démontrer que une suite ou une famille finie de réels forme une loi de probabilité.
- Savoir définir et calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.
- Savoir créer et utiliser un SCE à partir d'une variable aléatoire discrète.
- Savoir montrer que l'espérance d'une variable aléatoire discrète existe et dans ce cas savoir la calculer (cas finie ou infinie)
- Savoir montrer que la variance d'une variable aléatoire discrète existe et dans ce cas savoir la calculer. (cas finie ou infinie)
- Savoir appliquer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie et infinie.
- Savoir appliquer l'inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebycheff
- Savoir reconnaitre les lois usuelles et savoir les utiliser.
- Pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:
  - ✓ Connaître la loi, l'espérance et la variance.
  - ✓ savoir calculer $P(X > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
  - ✓ Savoir et savoir démontrer la propriété d'absence de mémoire
  - ✓ Savoir utiliser X pour déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire T dont la loi est définie par :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, P(T = n) = pq^n.$$