CH6 : Recherche de sujets de concours

Ecrit Agro 2022

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 . On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.

On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.

Pour tout entier i, on notera N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ème boule tirée s'il y a eu au moins i tirages, et 0 sinon.

1. Trouver la loi de X_2 puis donner son espérance et sa variance. $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2}$, $E(X_2) = \dfrac{3}{2}$ et $V(X_2) = \dfrac{1}{4}$
2. Trouver la loi de X_3 et donner son espérance. $X_3(\Omega) = \{1,2,3\}$, $P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3}$, $P(X_3 = 2) = \dfrac{1}{2}$, $P(X_3 = 3) = \dfrac{1}{6}$ et $E(X_3) = \dfrac{5}{6}$.
3. Donner, sans justifications, $X_n(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X_n. $X_n(\Omega) = \rrbracket 1, n\llbracket$
4. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. Utiliser les variables aléatoires N_i et la formule des probas composées $P(X = 1) = P(N_1 = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(X_n = n) = \dfrac{1}{n!}$
5. Prouver que pour tout $k \geqslant 2$, on a :

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} P(X_{i-1} = k-1).$$

   utiliser la formule des probas totales avec un SCE provenant de la première boule tirée.
6. En déduire que $E(X_{n+1}) - E(X_n) = \frac{1}{n+1}$. On multiplie l'égalité précédente par k et on somme pour obtenir l'espérance de X_n, question calculatoire
7. En déduire une expression de $E(X_n)$ sous forme d'une somme. faire apparaître une somme téléscopique pour obtenir que $E(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$
8. (a) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
   on encadre $\dfrac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$ et sur $[k-1, k]$ puis on utilise la croissance de l'intégrale.
   (b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   (c) En déduire un équivalent de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
9. Trouver une relation entre $E(X_{n+1}^2)$, $E(X_n^2)$ et $E(X_n)$. même méthode que dans 6)
10. En déduire une expression de $V(X_n)$ sous forme de somme puis un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$. $V(X_n) \sim \ln(n)$

ORAL AGRO 2021

Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel X.

Si cet entier X est impair, Anna donne X euros à Benoît, on considère que Benoît a gagné.

Si X est nul, on considère que la manche est nulle.

Si X est pair non nul, Benoît donne X euros à Anna on considère que Anna a gagné.

On pose G le gain algébrique de Anna.

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a ($a > 0$).

On note enfin :

- A : « Anna gagne », $p = P(A)$
- B : « Benoît gagne », $q = P(B)$
- et C :« la manche est nulle », $r = P(C)$.

1. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire G.
   On rappelle que `np.random.poisson(a)` *permet de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre* a.
2. (a) Déterminer r et exprimer p et q sous forme d'une somme. on cherche à exprimer les événements en utilisant X. $r = P(X =?)$, $p = P("X paire et non nulle")$, $q = P(X impaire")$.

   (b) Exprimer $p+q$ et $p-q$ en fonction de a. $p+q = 1-\mathrm{e}^{-a}$ et $p-q = \mathrm{e}^{-2a} - \mathrm{e}^{-a}$

   (c) En déduire les valeurs de r, p, q en fonction de a. $p = \dfrac{(1-\mathrm{e}^{-a})^2}{2}$ et $q = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2a}}{2}$ et $r = \mathrm{e}^{-a}$.
3. Compléter le programme de la question 1, pour qu'il permette de donner un estimation de la valeur de l'espérance du gain de Anna d'une part, et de la probabilité pour Anna de gagner, d'autre part. Pour estimer la probabilité d'un événement A issu d'une expérience aléatoire, on simule un grand nombre de fois l'expérience et on regarde la fréquence de réalisations de A. Pour estimer l' espérance d'une variable aléatoire X, on simule un grand nombre de fois X et on calcule la moyenne des simulations.
4. D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage ? il semble que le jeu soit favorable à Benoit *On pourra tester les valeurs de gain et de la probabilité qu'Anna gagne pour* $a = 2$.
5. (a) Exprimer G en fonction de X. $G = (-1)^X X$

   (b) Calculer l'espérance du gain G de Anna. utilisation du théorème de transfert, attention à l'absolue convergence ici $E(G) = -a\,\mathrm{e}^{-2a}$
6. On suppose désormais que X suit une loi géométrique de paramètre α. On garde les mêmes notations que précédemment.

   (a) Déterminer p, q, r. $r = 0$, $p = \dfrac{\alpha(1-\alpha}{1-(1-\alpha)^2}$ et $q = \dfrac{\alpha}{1-(1-\alpha)^2}$

   (b) Calculer l'espérance $E(G)$ de G après avoir justifié son existence. Transfert : $E(G) = \dfrac{-\alpha}{(2-\alpha)^2}$.

   (c) Comment interpréter le signe de $E(G)$? En moyenne, Anna perd