DM Toussaint Analyse

1) Question préliminaire :
on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite réelle ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leqslant a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leqslant \ell$.

c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

$$b_{2n} \geqslant \frac{b_n + a_n}{2}$$

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et supérieur ou égal a 1 .

3) a) Ecrire une fonction `suite(n)` permettant de renvoyer la valeur de u_n pour un entier naturel n.

b) Ecrire une fonction Python `lstsuite(n)` permettant de renvoyer la liste `[u0,...,un]` pour un entier n.

c) Utiliser cette fonction `lstsuite` pour tracer les points de coordonnées $(k, u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Conjecturer les variations de (u_n) ainsi que sa limite.

4) Étudier les variations de la suite (u_n), puis établir que la suite (u_n) diverge et donner sa limite.

5) Recherche d'un équivalent de u_n.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.

b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Utiliser la première question pour établir que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.

6) a) Compléter le programme `Python` suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$. Expliquer pourquoi la boucle se termine.

```
n=1
u=1
S=1 // S1=u0=1

while S<=1000:
   u=.............
   S=.............
   n=n+1
end

print(..........)
```

b) Montrer que $S_n = u_n^2 - 1$ puis en déduire un équivalent de S_n pour n au voisinage de $+\infty$.

CORRECTION

1) a) •Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite (a_k) est croissante, alors : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], a_k \leqslant a_n$.
Donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_n$. c'est à dire que : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant n a_n$.
Par conséquent, $b_n \leqslant a_n$. Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n \leqslant a_n \quad (\star)}$

$$\bullet b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - b_n = \frac{1}{n+1}(nb_n + a_n) - b_n$$
$$= \frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1} b_n + \frac{1}{n+1} a_n = -\frac{1}{n+1} b_n + \frac{1}{n+1} a_n$$
$$= \frac{1}{n+1}(a_n - b_n) \geqslant 0 \quad \text{d'après } (\star)$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

b) Comme (a_n) est croissante et converge vers ℓ, alors $a_n \leqslant \ell$.
En utilisant $(\star)$, il vient que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ , b_n \leqslant \ell$.
Ainsi, (b_n) est majorée par ℓ (**indépendant de** n).
La suite (b_n) étant croissante, d'après le théorème de limite monotone, $\boxed{(b_n) \text{ converge vers un réel , noté } \ell'.}$
Par passage à la limite dans $(\star)$, il vient que $\boxed{\ell' \leqslant \ell \quad (1).}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k\right)$$
$$= \frac{1}{2n}(nb_n + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k)$$
$$= \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k$$

$\forall k \in [\![n, 2n-1]\!], a_k \geqslant a_n$ car la suite (a_k) est croissante.
Donc $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \sum\limits_{k=n}^{2n-1} a_n$ c'est à dire : $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant (2n - 1 - n + 1)a_n$
$$\geqslant n a_n$$

Ainsi $b_{2n} \geqslant \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2n} n a_n$
$$\geqslant \frac{1}{2}(b_n + a_n)$$

Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } b_{2n} \geqslant \frac{b_n + a_n}{2}.}$

d) Par passage à la limite dans l'inégalité obtenue dans la question c),
il vient que $\ell' \geqslant \frac{1}{2}(\ell' + \ell)$, c'est à dire que $\frac{1}{2}\ell' \geqslant \frac{1}{2}\ell$.
Donc $\ell' \geqslant \ell \quad (2)$.
D'après les inégalités (1) et (2), $\ell = \ell'$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n.}$

2) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \geqslant 1$ » est vraie.

- Initialisation : $n = 0$. $u_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  On sait d'après $\mathcal{P}(n)$ que $u_n \geqslant 1$.
  Donc $u_n^2 + u_n \geqslant u_n \geqslant 1$.
  Ainsi $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ existe et par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $u_{n+1} \geqslant 1$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}}$

3) a) La fonction racine carrée est dans le module math.
from math import sqrt

```
def suite(n):
    u = 1
    for k in range(n): # ou range(1,n+1)
        u = sqrt(u**2+u)
    return u
```

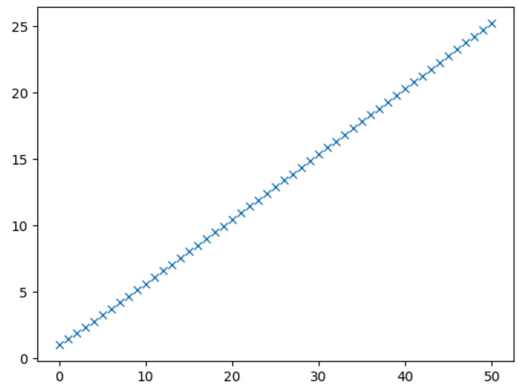
b)
```
def lstsuite(n):
    L = [1]
    for k in range(n):
        L.append(sqrt(L[-1]**2 + L[-1])
    return L

  # autre possibilité

def lstsuitebis(n):
    return [suite(k) for k in range(n+1)]
```

Dans le deuxième cas, on appelle la fonction suite et on recalcule tous les termes successivement de la suite à chaque fois. Donc le premier cas est moins couteux en temps et en stockage.

c) Pour les graphiques, on importe le module matplotlib.pyplot

```
import matplotlib.pyplot as plt
def graphe(n):
    X = [k for k in range(n+1)]
    Y = lstsuite(n)
    plt.plot(X,Y,'x')
    plt.show()
```

Avec $n = 50$, on obtient le graphique suivant :



On conjecture alors que la suite (u_n) est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

4)
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n \\ &= \frac{\cancel{u_n^2} + u_n - \cancel{u_n^2}}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \end{aligned}$$

Or $u_n \geqslant 1$ donc le numérateur et le dénominateur du quotient sont positifs.
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, c'est à dire que la suite (u_n) est croissante.
Par l'absurde supposons que (u_n) est majorée.
Alors d'après le théorème de limite monotone (u_n) converge vers $\ell \geqslant 1$ vérifiant l'équation $\sqrt{\ell^2 + \ell} = \ell$.

$$\sqrt{\ell^2+\ell}=\ell \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\ell \geqslant 0 \\ \ell^2+\ell=\ell^2\end{array}\right. \Longleftrightarrow \ell=0$$

Or $\ell \geqslant 1$ donc ceci est absurde.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Conclusion : $\boxed{(u_n) \text{ croissante et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

5) Recherche d'un équivalent de u_n.

a) Dans la question précédente, on a obtenu l'égalité suivante :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n}$$

Donc
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{u_n}{u_n\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+u_n} \\ &= \frac{\cancel{u_n}}{\cancel{u_n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1 = 2$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1}-u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1} = \dfrac{1}{2}.}$

b) • f est dérivable sur $[1,+\infty[$ par les théorèmes généraux.
$\forall x \geqslant 1$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1$

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 \geqslant 0 &\Longleftrightarrow \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \geqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow 2x+1 \geqslant 2\sqrt{x^2+x} \\ &\Longleftrightarrow (2x+1)^2 \geqslant 4(x^2+x) \quad \text{(car tous les termes sont positifs)} \\ &\Longleftrightarrow 4x^2+4x+1 \geqslant 4x^2+x \\ &\Longleftrightarrow 1 \geqslant 0 \quad \text{(toujours vraie)} \end{aligned}$$

Donc $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 1$ et $\boxed{f \text{ est croissante sur } [1,+\infty[}$.

• $u_{n+2}-u_{n+1}-(u_{n+1}-u_n) = f(u_{n+1})-f(u_n)$.
Or la suite (u_n) est croissante, donc $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Comme u_n et u_{n+1} sont dans l'intervalle $[1,+\infty[$ et que f est croissante sur $[1,+\infty[$, alors il vient que $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$.
Ainsi $u_{n+2}-u_{n+1}-(u_{n+1}-u_n) = f(u_{n+1})-f(u_n) \geqslant 0$.
Donc $\boxed{\text{la suite } (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

c) Dans la question 1), on a établi le résultat suivant :
Si (a_n) est une suite croissante qui converge vers un réel ℓ, alors la suite (b_n) converge aussi vers ℓ où $b_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
En appliquant cette propriété avec $a_n = u_{n+1}-u_n$, on a que la suite (a_n) est bien croissante et convergente vers $\dfrac{1}{2}$. Donc la suite (b_n) converge aussi vers $\dfrac{1}{2}$.

Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} = 1$

$b_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = \frac{1}{n}(u_n - u_0)$ (somme téléscopique).

Donc $u_n = nb_n + 1$.

Ainsi $\frac{u_n}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n}(nb_n + 1) = 2b_n + \frac{2}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2b_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2b_n + \frac{2}{n} = 1$

D'où $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}.}$

6) a)
```
n=1
u=1
S=1 // S1=u0=1

while S<=1000:
    u= sqrt(u**2+u)
    S = S + u # ou S +=  u
    n = n+1 # ou n += 1
end
print(n)
```

$S_n \geqslant u_{n-1}$, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Ainsi la boucle se termine car S_n dépasse n'importe quel réel à partir d'un certain rang.

b) On remarque que $u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$ donc $u_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

D'où $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 = u_n^2 - u_0^2$ (somme téléscopique).

Donc $\boxed{S_n = u_n^2 - 1}$

Ainsi $\frac{S_n}{u_n^2} = 1 - \frac{1}{u_n^2}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{u_n^2} = 1$

D'où $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$.

Comme $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}$, alors il vient que :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}}$$