CH6 : Recherche de sujets de concours

Ecrit Agro 2022

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 . On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.

On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.

Pour tout entier i, on notera N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ème boule tirée s'il y a eu au moins i tirages, et 0 sinon.

1. Trouver la loi de X_2 puis donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de X_3 et donner son espérance.
3. Donner, sans justifications, $X_n(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X_n.
4. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
5. Prouver que pour tout $k \geqslant 2$, on a :

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} P(X_{i-1} = k-1).$$

6. En déduire que $E(X_{n+1}) - E(X_n) = \frac{1}{n+1}$.
7. En déduire une expression de $E(X_n)$ sous forme d'une somme.
8. (a) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   (c) En déduire un équivalent de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
9. Trouver une relation entre $E\left(X_{n+1}^2\right)$, $E\left(X_n^2\right)$ et $E(X_n)$.
10. En déduire une expression de $V(X_n)$ sous forme de somme puis un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Oral Agro 2021

Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel X.

Si cet entier X est impair, Anna donne X euros à Benoît, on considère que Benoît a gagné.

Si X est nul, on considère que la manche est nulle.

Si X est pair non nul, Benoît donne X euros à Anna on considère que Anna a gagné.

On pose G le gain algébrique de Anna.

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a ($a > 0$).

On note enfin :

- A : « Anna gagne », $p = P(A)$
- B : « Benoît gagne », $q = P(B)$
- et C :« la manche est nulle », $r = P(C)$.

1. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire G.

   On rappelle que `np.random.poisson(a)` *permet de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a.*
2. (a) Déterminer r et exprimer p et q sous forme d'une somme.

   (b) Exprimer $p+q$ et $p-q$ en fonction de a.

   (c) En déduire les valeurs de r, p, q en fonction de a.
3. Compléter le programme de la question 1, pour qu'il permette de donner une estimation de la valeur de l'espérance du gain de Anna d'une part, et de la probabilité pour Anna de gagner, d'autre part.
4. D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage ? *On pourra tester les valeurs de gain et de la probabilité qu'Anna gagne pour $a = 2$.*
5. (a) Exprimer G en fonction de X.

   (b) Calculer l'espérance du gain G de Anna.
6. On suppose désormais que X suit une loi géométrique de paramètre α. On garde les mêmes notations que précédemment.

   (a) Déterminer p, q, r.

   (b) Calculer l'espérance $E(G)$ de G après avoir justifié son existence.

   (c) Comment interpréter le signe de $E(G)$?

CORRECTION MCR AGRO 2022

1. Quand $n=2$, l'urne est vidée en un seul tirage si $N_1=1$, ou bien en deux tirages si $N_1=2$. Ces deux possibilités sont équiprobables, donc

$$\boxed{\begin{cases} X_2(\Omega)=\{1,2\} \\ P(X_2=1)=P(X_2=2)=\frac{1}{2} \end{cases}}$$

Donc $E(X_2)=1P(X_2=1)+2P(X_2=2)=\boxed{\frac{3}{2}.}$

Et $E(X_2^2)=1P(X_2=1)+4P(X_2=2)=\frac{5}{2}$ d'où $V(X_2)=E(X_2^2)-E(X_2)^2=\boxed{\frac{1}{4}.}$

2.
- $X_3(\Omega)=\{1,2,3\}$.
- $[X_3=1]=[N_1=1]$ donc $P(X_3=1)=\frac{1}{3}$.
- $[X_3=2]=([N_1=3]\cap[N_2=1])\cup([N_1=2]\cap[N_2=1])$,
  donc par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(X_3=2) &= P([N_1=3]\cap[N_2=1])+P([N_1=2]\cap[N_2=1]) \\ &= P(N_1=3)P_{(N_1=3)}(N_2=1)+P(N_1=2)P_{(N_1=2)}(N_2=1) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- $[X_3=3]=[N_1=3]\cap[N_2=2]\cap[N_3=1]$ donc

$$\begin{aligned} P(X_3=3) &= P(N_1=3)P_{(N_1=3)}(N_2=2)P_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_3=1) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} X_3(\Omega)=\{1,2,3\} \\ P(X_3=1)=\frac{1}{3} \quad , \quad P(X_3=2)=\frac{1}{2} \quad , \quad P(X_3=3)=\frac{1}{6} \end{cases}}$$

Donc $E(X_3)=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}=\boxed{\frac{5}{6}.}$

3. $\boxed{X_n(\Omega)=[\![1,n]\!].}$

4. $[X_n=1]=[N_1=1]$ donc $\boxed{P(X_n=1)=\frac{1}{n}.}$

$[X_n=n]=[N_1=n]\cap[N_2=n-1]\cap\cdots\cap[N_n=1]=\bigcap_{i=1}^{n}[N_i=n+1-i]$,

donc, il vient que :

$$\begin{aligned} P(X_n=n) &= P(N_1=n)P_{[N_1=n]}(N_2=n-1)\dots P_{[N_1=n]\cap\cdots\cap[N_{n-1}=2]}(N_n=1) \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}\cdot 1 \\ &= \boxed{\frac{1}{n!}.} \end{aligned}$$

5. Soit $k\geq 2$. Si l'urne contient au départ n boules, alors $([N_1=i])_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X_n=k) &= \sum_{i=1}^{n}P(N_1=i)P_{[N_1=i]}(X_n=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P_{[N_1=i]}(X_n=k) \qquad (1) \end{aligned}$$

- Sachant que $[N_1=1]$ est réalisé , alors l'urne est immédiatement vidée, donc l'événement $[X_n=k]$ n'est pas réalisé. Par conséquent $P_{[N_1=1]}(X_n=k)=0$.
- Soit i un entier tel que $2\leq i\leq n$:
  Sachant que $[N_1=i]$ est réalisé , alors après le premier tirage, il reste donc dans l'urne les boules numérotées de 1 à $i-1$. On est alors ramené à la situation de départ en partant d'une urne de $i-1$ boules. Donc le nombre de tirages restants, à savoir X_n-1, suit la même loi que X_{i-1}. Ainsi

$$\begin{aligned} P_{[N_1=i]}(X_n=k) &= P_{[N_1=i]}(X_n-1=k-1) \\ &= P(X_{i-1}=k-1) \end{aligned}$$

En remplaçant dans la formule (**??**) les probabilités conditionnelles par leurs valeurs, on obtient donc

$$\boxed{P(X_n=k)=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}P(X_{i-1}=k-1).}$$

6. En multipliant la formule obtenue à la question 5 par k et en sommant pour $k = 2, \ldots, n$ on obtient

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{n} kP(X_n = k)}_{A} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n} kP(X_{i-1} = k-1)}_{B}.$$

- D'un côté A est égal à $E(X_n) - P(X_n = 1) = E(X_n) - \frac{1}{n}$.
- De l'autre côté, par les changements d'indices $i = j - 1$ et $h = k - 1$ puis en échangeant les signes somme, il vient que :

$$B = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1}(\ell+1)P(X_j = \ell).$$

Or les variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ prennent leurs valeurs dans des sous-ensembles de $[\![1, n-1]\!]$, donc la somme $\sum_{\ell=1}^{n-1}(\ell+1)P(X_j = \ell)$ est égale à $E(X_j + 1)$ par théorème de transfert. Donc

$$B = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} E(X_j + 1) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} E(X_j) + \frac{n-1}{n}.$$

- L'égalité entre A et B amène donc

$$E(X_n) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} E(X_j) + \frac{n-1}{n}$$

donc en multipliant cette égalité par n puis en ajoutant 1 à chaque membre :

$$nE(X_n) = \sum_{j=1}^{n-1} E(X_j) + n. \qquad (2)$$

- On récrit cette équation au rang $n + 1$:

$$(n+1)E(X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} E(X_j) + n + 1 \qquad (3)$$

Alors soustrayant les égalités (**??**) − (**??**) on obtient :

$$(n+1)E(X_{n+1}) - nE(X_n) = E(X_n) + 1$$

ce qui donne bien $\boxed{E(X_{n+1}) - E(X_n) = \frac{1}{n+1}.}$

7. $\sum_{k=1}^{n-1}(E(X_{k+1}) - E(X_k)) = E(X_n) - E(X_1)$ (somme téléscopique).
Donc en utilisant le résultat de la question 6, il vient que
$E(X_n) - E(X_1) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}$.

Comme $X_1 = 1$, alors $E(X_1) = 1$ et on peut conclure $\boxed{E(X_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.}$

8. (a) Soit $k \geq 2$. Sur $]0, +\infty[$, la fonction inverse est continue et décroissante.
   - $\forall t \in [k, k+1], \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

   Donc par croissance de l'intégrale, avec $k \leqslant k+1$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$.

   Or $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\int_k^{k+1}1\,\mathrm{d}t = \frac{k+1-k}{k} = \frac{1}{k}$, donc $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.
   - $\forall t \in [k-1, k], \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t}$.

   Donc par croissance de l'intégrale, avec $k - 1 \leqslant k$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Or $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{k-(k-1)}{k} = \frac{1}{k}$, donc $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Ainsi $\boxed{\forall k \geqslant 2, \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.}$

   (b) En sommant l'encadrement de la question 8.(a) pour k allant de 2 à n, on obtient :

$$\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \int_1^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

   En utilisant que $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - 1$, cela donne :

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

   En divisant cet encadrement par $\ln(n)$ (qui est strictement positif dès que $n \geq 2$) on obtient :

$$\frac{1 - \ln(2) + \ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln(n)}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

c'est à dire :

$$1+\frac{1-\ln(2)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1+\frac{1}{\ln(n)}.$$

Par opérations sur les limites, le majorant et le minorant de cet encadrement tendent vers 1 quand $n \to +\infty$, donc le théorème des gendarmes donne $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

(c) $\boxed{E(X_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$ d'après les résultats des questions 7 et 8.b.

9. Suivant la même méthode qu'à la question 6, on multiplie par k^2 et on somme pour k de 2 à n l'égalité obtenue à la question 5. On obtient :

$$\sum_{k=2}^{n}k^2\,P(X_n=k)=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}k^2\,P(X_{i-1}=k-1)$$

ce qui donne par les mêmes opérations qu'à la question 5 :

$$\begin{aligned}E(X_n^2)-\frac{1}{n}&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1}(\ell+1)^2\,P(X_j=\ell)\\&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}E((X_j+1)^2)\\&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}E(X_j^2)+\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}E(X_j)+\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $nE(X_n)=\sum_{j=1}^{n-1}E(X_j)+n$ (résultat intermédiaire (**??**) obtenu à la question 5) on en déduit

$$nE(X_n^2)=\sum_{j=1}^{n-1}E(X_j^2)+2nE(X_n)-n. \tag{4}$$

Au rang $n+1$, cette égalité devient

$$\begin{aligned}(n+1)E(X_{n+1}^2)&=\sum_{j=1}^{n}E(X_j^2)+2(n+1)E(X_{n+1})-n-1\\&=\sum_{j=1}^{n}E(X_j^2)+2(n+1)\left(E(X_n)+\frac{1}{n+1}\right)-n-1 \text{ (question 6)}\\&=\sum_{j=1}^{n}E(X_j^2)+2(n+1)E(X_n)-n+1.\end{aligned} \tag{5}$$

Alors la différence (**??**) − (**??**) donne

$$(n+1)E(X_{n+1}^2)-nE(X_n^2)=E(X_n^2)+2E(X_n)+1$$

et par conséquent $\boxed{E(X_{n+1}^2)=E(X_n^2)+\frac{2}{n+1}E(X_n)+\frac{1}{n+1}.}$

10. En calculant la somme télescopique $\sum_{k=1}^{n-1}\left(E(X_{k+1}^2)-E(X_k^2)\right)$ on trouve

$$\begin{aligned}E(X_n^2)-E(X_1^2)&=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}E(X_k)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\\&=2\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}E(X_{j-1})+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\end{aligned}$$

En utilisant $X_1=1$ et $E(X_{j-1})=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}$, on en déduit

$$E(X_n^2)=2\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{ij}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

Cependant, comme i et j jouent des rôles symétriques dans $\frac{1}{ij}$, on a

$$\begin{aligned}2\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{ij}&=\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{ij}+\sum_{1\leq j<i\leq n}\frac{1}{ij}\\&=\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{1}{ij}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\\&=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)^2-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\end{aligned}$$

donc $E(X_n^2) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$,
ce qui amène finalement :

$$\boxed{V(X_n) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.}$$

Mais alors $\frac{V(X_n)}{\ln n} = -\frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

Or d'une part la série $\sum \frac{1}{j^2}$ est convergente, et par conséquent $\frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et d'autre part $\frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'après la question 8.b.

Par somme de limites $\frac{V(X_n)}{\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, donc

$$\boxed{V(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

Correction Oral Agro 2021

1. On propose le code

```python
import numpy as np

def simulG(a):
    X = np.random.poisson(a)
    if X%2==0:
        return X
    return -X
```

2. (a) On a $r = P(X=0) = e^{-a}$.

$$\begin{aligned}
p &= P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = 2k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) \qquad \text{par incompatibilité)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-a} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\
q &= P\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = 2k+1)\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1) \qquad \text{par incompatibilité)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}
\end{aligned}$$

(b) $((X=0), (X$ paire et non nulle$), (X$ impaire$))$ forme un système complet d'événements, donc on a $p+q+r=1$, et donc

$$p + q = 1 - r = 1 - e^{-a}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} p-q &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-a)^k}{k!}e^{-a} \\ &= e^{-a}(e^{-a}-1) \end{aligned}$$

(c) On trouve alors en résolvant le système

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(p+q+p-q) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-a}\right)^2 \\ q &= \frac{1}{2}(p+q-(p-q)) = \frac{1}{2}(1-e^{-2a}) \end{aligned}$$

3. On propose alors le code

```python
def approxG(a,nbsim):
    moy = 0
    gagne = 0
    for _ in range(nbsim):
        gain = simulG(a)
        if gain > 0:
            gagne+=1
        moy += gain
    return moy/nbsim,gagne /nbsim
```

4. Il semble sur les simulations que le gain moyen d'Anna est négatif, et qu'elle a une probabilité plus faible de gagner que Benoit.

5. (a) On a

$$G = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ pair non nul} \\ -X & \text{si } X \text{ impair} \end{cases} = (-1)^X X.$$

(b) $E(G)$ existe ssi la série $\sum(-1)^k kP(X=k)$ est absolument convergente (théorème de tranfert) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left|(-1)^k k\right| P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$
Or X suit une loi de Poisson de paramètre a donc $E(X)$ existe.

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = E(X)$ et $\sum(-1)^k kP(X=k)$ est absolument convergente.
Ainsi G admet une espérance et on a :

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k kP(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{(-a)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a} \\ &= \mathrm{e}^{-a}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-a)^k}{(k-1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-a}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-a)^{i+1}}{i!} \qquad (i=k-1) \\ &= -a\,\mathrm{e}^{-a}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-a)^i}{i!} \qquad = -a\,\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{e}^{-a} = -a\,\mathrm{e}^{-2a} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{E(G) = -a\,\mathrm{e}^{-2a}.}$

6. (a) De la même façon qu'en question 2), on obtient

$$\begin{aligned} r &= P(X=0) = 0 \\ p &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha(1-\alpha)^{2k-1} \\ &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)^2} \\ q &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) = \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha(1-\alpha)^{2k} \\ &= \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^2} \end{aligned}$$

(b) De même, Comme X admet une espérance, alors la série $\sum(-1)^k kP(X=k)$ est absolument convergente, et donc par le théorème de transfert G admet bien une espérance. On a alors :

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k\alpha(1-\alpha)^{k-1} \\ &= -\alpha\sum_{k=1}^{+\infty}k(\alpha-1)^{k-1} \\ &= \frac{-\alpha}{(2-\alpha)^2} \end{aligned}$$

en utilisant une série géométrique dérivée.

(c) En moyenne, Anna est donc perdante à ce jeu.