Correction TD n°6 Exercice 14 (Agro 2019)

1) La variable aléatoire T suit la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$. D'après le cours, son espérance vaut $1/p = 2$ et sa variance vaut $(1-p)/p^2 = 2$.

2) L'événement $(T > n)$ correspond à l'événement « les n premiers lancers donnent un pile » ; comme les lancers sont indépendants, on a $P(T > n) = (1/2)^n$.

3) On a :

$$\begin{aligned} P(T > n+m|T > n) &= \frac{P((T > n+m) \cap (T > n))}{P(T > n)} \\ &= \frac{P(T > n+m)}{P(T > n)} \quad \text{car } (T > n+m) \subset (T > n) \\ &= \frac{(1/2)^{n+m}}{(1/2)^n} \\ &= (1/2)^m \end{aligned}$$

donc $P(T > n+m|T > n) = P(T > m)$. On peut interpréter ceci en disant que la loi géométrique est une loi sans mémoire : le fait de savoir qu'il y a eu n échecs ne change pas la probabilité que les m tentatives suivantes soient des échecs.

Ces trois premières questions sont des questions de cours !!

4) On a :
- $p_1 = 0$ puisque $S \geqslant 2$.
- $p_2 = P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) \times P(F_2)$ puisque les lancers sont indépendants ; donc $p_2 = 1/4$.
- $p_3 = P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = (1/2)^3 = 1/8$ pour la même raison.
- Il n'y a que deux possibilités puisque les deux derniers lancers doivent être des face, et donc le précédent doit être un pile sinon le double face se produirait au troisième lancer :

$$\begin{aligned} p_4 &= P((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)) \\ &= P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \quad \text{car ces événements sont incompatibles} \\ &= (1/2)^4 + (1/2)^4 \\ &= 1/8 \end{aligned}$$

On calcule les sommes $\sum_{k=1}^{n} p_k$ successivement pour n variant de 1 à 4, on trouve successivement : $0, 1/4, 3/8, 1/2$, d'où :

$$q_1 = 1; \quad q_2 = 3/4; \quad q_3 = 5/8; \quad q_4 = 1/2.$$

5) $P(S > n) = 1 - P(S \leqslant n)$, d'où

$$\boxed{P(S > n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(S = k) = q_n.}$$

6) Puisque q_n est une probabilité d'après la question précédente, on a bien $q_n \in [0, 1]$.
De plus, si S est strictement supérieur à $n+1$, alors il est strictement supérieur à n, donc l'événement $(S > n+1)$ est inclus dans l'événement $(S > n)$, et donc $P(S > n+1) \leqslant P(S > n)$, i.e. $q_{n+1} \leqslant q_n$. La suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.
C'est une suite décroissante et minorée, donc d'après le théorème de limite monotone, elle converge.

7) Soit R_n l'ensemble des suites de n lancers qui ne donnent pas de double face, c'est-à-dire l'ensemble des suites de n lancers qui vérifient $S > n$. L'événement $(S = n+3)$ est l'ensemble des suites de $n+3$ lancers obtenues en prenant une suite dans R_n et en la poursuivant par les résultats pile, face, face. En effet :
- une telle suite vérifie bien $(S = n+3)$: le pile imposé pour le $(n+1)$-ième lancer permet de choisir n'importe quelle suite dans R_n car cette suite ne pourra alors pas produire $S = n+1$;
- si une suite vérifie $(S = n+3)$, alors elle est de ce type puisque ses n premiers lancers sont dans R_n (sinon on aurait $S \leqslant n$), ses deux derniers termes sont des face, et son $(n+1)$-ième terme est un pile sinon on aurait $(S \leqslant n+2)$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
P(S=n+3) &= P(\text{´ les } n \text{ premiers lancers forment une suite dans } R_n \text{ ˇ} \cap \overline{F_{n+1}} \cap F_{n+2} \cap F_{n+3}) \\
&= P(\text{´ les } n \text{ premiers lancers forment une suite dans } R_n \text{ ˇ}) \times P(\overline{F_{n+1}} \cap F_{n+2} \cap F_{n+3}) \\
&\quad \text{car les n premiers lancers et les 3 derniers sont indépendants} \\
&= P(S>n) \times (1/2)^3 \\
&= q_n/8
\end{aligned}$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
q_{n+3} - q_{n+2} &= \left(1 - \sum_{k=1}^{n+3} p_k\right) - \left(1 - \sum_{k=1}^{n+2} p_k\right) \\
&= -p_{n+3} \quad \text{(téléscopage)} \\
&= -q_n/8
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{q_{n+3} = q_{n+2} - q_n/8}$.

8) Soit ℓ la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui existe d'après la question 6. On a aussi $q_{n+2} \longrightarrow \ell$ et $q_{n+3} \longrightarrow \ell$, d'où d'après la relation ci-dessus et les propriétés générales des limites : $\ell = \ell - \ell/8$, ce qui implique que $\ell = 0$.
Interprétation :
Notons D l'événement « on n'obtient jamais de double face ». Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement D est contenu dans l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas de double face » ; on en déduit que $P(D) \leqslant q_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $P(D) \leqslant 0$. Or $P(D)$ est une probabilité, donc $P(D) \geqslant 0$. De ces deux inégalités, on conclut que $P(D) = 0$: l'événement D est quasi-impossible.

9) On raisonne cette fois-ci sur les premiers lancers, en utilisant les ensembles R_n et R_{n+1} : l'événement $(S > n+2)$ est la réunion des deux événements suivants :
– l'ensemble des séquences pour lesquelles le premier terme est pile et les $n+1$ suivants sont un élément de R_{n+1} ;
– l'ensemble des séquences pour lesquelles le premier terme est face, le deuxième pile, et les n suivants sont un élément de R_n.
Justification :
- $(S > n+2)$ contient cette réunion : en effet, pour le premier ensemble, le pile initial empêche d'avoir $S = 2$, et ensuite les lancers 2 à $n+2$ ne peuvent pas présenter de double face puisqu'il s'agit d'une suite de lancers dans R_{n+1} ; et pour le deuxième ensemble, on n'a pas $S = 2$ (face puis pile) ni $S = 3$ (pile au deuxième lancer), et ensuite on ne peut plus avoir de double face puisqu'on est dans R_n.
- Toute suite de lancers vérifiant $S > n+2$ est formée ainsi, puisque le premier lancer donne soit pile, soit face, et dans ce deuxième cas, le deuxième lancer est obligatoirement un pile.

Cette réunion est disjointe, sa probabilité est donc la somme des probabilités ; le premier événement est l'intersection des événements indépendants $\overline{F_1}$ et « les lancers 2 à $n+2$ ne présentent pas de double face », et le deuxième événement est l'intersection des événements indépendants $F_1 \cap \overline{F_2}$ et « les lancers 3 à $n+2$ ne présentent pas de double face » ; de plus, « les lancers 2 à $n+2$ ne présentent pas de double face »a la même probabilité que $(S > n+1)$ (le moment où on commence à compter les lancers n'intervient pas, et il y a $n+1$ lancers), et de même « les lancers 3 à $n+2$ ne présentent pas de double face »a la même probabilité que $S > n$. On en déduit :

$$P(S > n+2) = P(\overline{F_1}) \times P(S > n+1) + P(F_1 \cap \overline{F_2}) \times P(S > n)$$

d'où :

$$q_{n+2} = \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4}.$$

Remarque : on pouvait aussi montrer cette formule par récurrence à partir de la formule de la question 7.

10) Le discriminant vaut $\Delta = (1/2)^2 + 4/4 = 5/4$, d'où les racines :

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}; \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

11) C'est un système linéaire à 2 équations et 2 inconnues, dont le déterminant vaut $r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2 = r_1 r_2 (r_2 - r_1)$ qui est non nul puisque r_1 et r_2 sont non nuls et distincts. Il admet donc une unique solution, d'après le cours.

12) $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire double .
Son équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$ admet deux racines r_1 et r_2 d'aprés la question 10°). Donc il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
Déterminons λ et μ, pour cela on résout :

$$\left\{\begin{array}{ll} q_1 & = \lambda r_1 + \mu r_2 \\ q_2 = \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda & = A \\ \mu & = B \end{array}\right. . \quad \text{(d'après la question 11°))}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = Ar_1^n + Br_2^n}$.

Autre façon de raisonner : On le prouve par récurrence double sur n :
- Initialisation : faite à la question 11.
- Hérédité : on suppose la propriété vraie pour q_n et q_{n+1}, et on montre qu'elle l'est alors aussi pour q_{n+2} :

$$\begin{aligned}
q_{n+2} &= \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4} \\
&= \frac{Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}}{2} + \frac{Ar_1^n + Br_2^n}{4} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= Ar_1^n \left(\frac{r_1}{2} + \frac{1}{4}\right) + Br_2^n \left(\frac{r_2}{2} + \frac{1}{4}\right) \\
&= Ar_1^n \times r_1^2 + Br_2^n \times r_2^2 \quad \text{car } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont racines de } X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} \\
&= Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}
\end{aligned}$$

- Conclusion : par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

13) On a $|r_1| = (\sqrt{5} - 1)/4 < |r_2|$; on va donc montrer que $q_n \sim Br_2^n$:

$$\frac{q_n}{Br_2^n} = \frac{Ar_1^n + Br_2^n}{Br_2^n} = \frac{A}{B}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n + 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

car $\left|\frac{r_1}{r_2}\right| < 1$ donc le premier terme tend vers 0.
On a donc :

$$q_n \sim Br_2^n.$$

On a bien $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $0 < r_2 < 1$.