Gammes du mardi 9 septembre 2025

1 Soit n un entier supérieur à 2. Calculer $\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{2k+1}}$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{2k+1}} &= \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{9^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{-1}{9}\right)^k \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{9}\right)^2 \times \frac{1 - \left(\frac{-1}{9}\right)^{n-2+1}}{1 - \left(\frac{-1}{9}\right)} \text{ car } -\frac{1}{9} \neq 1 \\
&= \frac{1}{3^5} \times \frac{9}{10}\left(1 - \left(\frac{-1}{9}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{270}\left(1 - \left(\frac{-1}{9}\right)^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{2k+1}} = \frac{1}{270}\left(1 - \left(\frac{-1}{9}\right)^{n-1}\right)}$

Gammes du jeudi 11 septembre 2024

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k(k-1)}{2n}$

Correction :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{k(k-1)}{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(k^2-k) = \frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=1}^{2n}k^2 - \sum_{k=1}^{2n}k\Big) \\
&= \frac{1}{\cancel{2n}}\Big(\frac{\cancel{2n}(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{\cancel{2n}(2n+1)}{2}\Big) \\
&= \frac{(2n+1)}{2}\Big(\frac{4n+1}{3} - 1\Big) \\
&= \frac{(2n+1)}{2}\frac{(4n+1-3)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)}{2}\frac{(4n-2)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n-1)}{3} \\
&= \boxed{\frac{4n^2-1}{3}}
\end{aligned}$$

Gammes du lundi 15 septembre 2025

1 1) Donner au voisinage de $+\infty$ un équivalent simple des expressions suivantes :

$a)\ \ln(1+\frac{3}{x})\quad b)\ e^{\frac{1}{x+1}}-1\quad c)\ \ln(1-\frac{x+1}{x^2-1})$

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ pour $x\in\mathbb{R}$.

Correction :

1)

a) $\ln(1+\frac{3}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{x}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$.

b) $e^{\frac{1}{x+1}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x+1}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$.

Or $\frac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, donc $e^{\frac{1}{x+1}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

c) On remarque que $-\frac{x+1}{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{x^2}=-\frac{1}{x}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$. D'où $\ln(1-\frac{x+1}{x^2-1}) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x+1}{x^2-1}$.

Ainsi $\ln(1-\frac{x+1}{x^2-1}) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.

2) Soit $x\in\mathbb{R}$. A partir d'un certain rang n tel que $x>-n$ (possible car $-n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$), il vient que :

$(1+\frac{x}{n})^n=\mathrm{e}^{\,n\ln(1+\frac{x}{n})}$

$\ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{n}=0$.

Donc $n\ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{x}{n})=x$.

Ainsi par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n=\mathrm{e}^{\,x}$.

GAMMES DU MARDI 16 SEPTEMBRE 2025

1 Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
Ecrire une fonction `suite` qui calcule S_n pour un entier n.

Correction :

Code

```python
def suite(n):
    s = 0
    for k in range(1 , n+1):
        s  += 1 / k**2
    return s
```

---

2 Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = x^x$. Donner l'équation de la tangente en 1

Correction :

$f(x) = \mathrm{e}^{x \ln x}$. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto x$ et $\ln$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par produit, $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \text{donc } f'(x) &= \left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) e^{x \ln x} \\ &= (\ln x + 1)e^{x \ln x} \\ &= \boxed{(\ln x + 1)x^x}. \end{aligned}$$

L'équation de la tangente en 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x$.

Gammes du jeudi 18 septembre 2025

1 Déterminer l'ensemble de définition et les variations de f pour $f(x) = (\ln x)^{\ln(x)}$. On déterminera les limites aux bornes de son ensemble de définition. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Correction :

$f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)\ln(\ln(x))}$ $f(x)$ existe ssi $x > 0$ et $\ln(x) > 0$. Donc $D_f =]1;+\infty[$.

f est dérivable sur $]1,+\infty[$ d'après les théorèmes généraux.

$\forall x > 1, f'(x) = \left(\dfrac{1}{x}\ln(\ln x) + \ln x \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right) f(x) = \dfrac{f(x)}{x}(1+\ln(\ln(x))$

Comme $f(x) > 0$ et $x > 1$, alors $\dfrac{f(x)}{x} > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1+\ln(\ln(x))$.

$1+\ln(\ln(x)) \geqslant 0 \iff \ln(\ln x) \geqslant -1 \iff \ln(x) \geqslant \mathrm{e}^{-1} \iff x \geqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$

x	1		$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	↘	$\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)\ln(\ln(x)) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée).

$\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{u\to0} u\ln(u) = 0$ (CC) donc $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x)\ln(\ln(x)) = 0$

Ainsi par composition , $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1$.

Oui, f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = 1$.

Gammes du mardi 23 septembre 2025

1 Soit f la fonction définie sur $]-3,2[$ par $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$.
Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on déterminera tels que
$\forall x \in]-3,2[\ f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}+\dfrac{c}{x-2}$ et en déduire la valeur de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction :

$$a+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{x-2}=\frac{a(x^2+x-6)+b(x-2)+c(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$\begin{cases} a=3 \\ 3+b+c=4 \\ -18-2b+3c=-25 \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \\ b=1-c \\ -2(1-c)+3c=-7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ 5c=-5 \text{ ie } c=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 3+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[3x+2\ln|x+3|-\ln|x-2|\Big]_0^1 \\ &= 3+2\ln 4-\ln 1-2\ln 3+\ln 2\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3-2\ln 3+5\ln 2}$

Gammes du jeudi 25 septembre 2025

1 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable

$I_1 = \int_{-1/4}^{0} \frac{3x-1}{(2x+1)^5}\,\mathrm{d}x$

$I_2 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ avec $u = \sqrt{t^2-1}$

$I_3 = \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ avec $t = \cos x$

Correction :

$I_1 = \int_{-1/4}^{0} \frac{3x-1}{(2x+1)^5}\,\mathrm{d}x$

On pose $t = 2x+1$ (On a aussi : $x = \dfrac{t-1}{2}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$.)

- $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$
- $\begin{array}{c|c|c} x & -1/4 & 0 \\ \hline t & 1/2 & 1 \end{array}$.
- t est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1/4, 0]$

donc

$$I_1 = \int_{1/2}^{1} \frac{3\frac{t-1}{2}-1}{t^5}\,\frac{\mathrm{d}t}{2} = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{4}\frac{3t-5}{t^5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{1/2}^{1} \frac{3}{t^4} - \frac{5}{t^5}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int_{1/2}^{1} 3t^{-4} - 5t^{-5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[-t^{-3} + \frac{5t^{-4}}{4}\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{t^3} + \frac{5}{4t^4}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{4}\left(-1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{1/8} - \frac{5}{4\times\frac{1}{16}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 8 - 20)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 8 - 20\right) = -\frac{47}{16}$$

$I_2 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{t^2-1}}$

On pose $u = \sqrt{t^2-1}$

- $\mathrm{d}u = \dfrac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$
- $\begin{array}{c|c|c} t & \sqrt{2} & 2 \\ \hline u & 1 & \sqrt{3} \end{array}$.
- u est $\mathcal{C}^1$ sur $[\sqrt{2}, 2]$ car $t^2-1>0$ sur $[\sqrt{2}, 2]$

$$I_2 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^2} \times \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \Big[\arctan\, u\Big]_1^{\sqrt{3}}$$
$$= \arctan(\sqrt{3}) - \arctan\, 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x$$

On pose $t = \cos x$

- $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$
- $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}$.
- t est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \times (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_1^0 t^2(1-t^2)\times(-\,\mathrm{d}t)$$
$$= \int_0^1 t^2 - t^4\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Gammes du mardi 30 septembre 2025

1 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$. Calculer en fonction de a, b et n :

a) $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} a^{-j-1}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} b^k$ c) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$

Correction :

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} a^{-j-1} = a^{-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{a}\right)^j = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{a}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} b^k \underset{(i=k-1)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} b^{i+1} = b \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} b^i = b \cdot (1+b)^{n-1}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+b)^k = (1+a+b)^n$

Correction : Gammes du jeudi 2 octobre 2025

1 Soit p et q deux éléments de $]0,1[$ tels que $p+q=1$.
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

Correction :
On utilise la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ si $k \geqslant 1$ (à savoir redémontrer).

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k} &\underset{(i=k-1)}{=} n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i+1}q^{n-i-1}\\ &= n\cdot p\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i q^{n-1-i}\\ &= n\cdot p\underbrace{(p+q)^{n-1}}_{=1} = n\cdot p\end{aligned}$$

Qu'a-t-on démontré ?

Gammes du mardi 7 octobre 2025

1 Nature et somme en cas de convergence des séries de terme général $u_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{3^n}$ et $v_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n(n+1)!}$.

Correction :

- $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k - \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{-1}{3}\right)^k$

  Comme $-1 < -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3} < 1$, alors les séries géométriques $\sum \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $\sum \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$ sont convergentes. Donc

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{-1}{3}\right)^k = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}$

  Donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge et } \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{3}{4}.}$

- $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k = 2\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{(k+1)!} \underset{(j=k+1)}{=} 2\sum\limits_{j=1}^{n+1} \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}}{j!} = 3\left(\sum\limits_{j=0}^{n+1} \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^j}{j!} - 1\right)$.

  Or $\sum \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente.

  Donc $\sum v_n$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k = 3\left(\exp\left(\dfrac{2}{3}\right) - 1\right)$.

GAMMES DU JEUDI 9 OCTOBRE 2025

1 Nature et somme de la série de terme général $\dfrac{n^2}{2^{2n}}$ et $\dfrac{n^2}{n!}$.

Correction :

- On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2}{2^{2n}}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} k(k-1+1)\frac{1}{4^k} = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}.$$

Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, alors les séries géométriques dérivées $\sum n(n-1)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}$ et $\sum n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ convergent. Donc il vient que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n &= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\\
&= \frac{1}{16}\frac{2}{(1-\frac{1}{4})^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} = \frac{4^3}{8\times 3^3} + \frac{4^2}{4\times 3^2}\\
&= \frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{8+12}{27}\\
&= \frac{20}{27}\end{aligned}$$

Donc $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{20}{27}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k!}$.

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)+k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!}\\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\\
&= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{i!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \quad (i = k-2)\text{et}(j = k-1)\end{aligned}$$

Or $\sum \dfrac{1}{n!}$ est une série exponentielle convergente.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{i!} + \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{j!} = 2\,\mathrm{e}$

Ainsi la série $\sum \dfrac{n^2}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2}{n!} = 2\,\mathrm{e}$.

Gammes du mardi 14 octobre 2025

1 Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages au hasard d'une boule sans remise de la boule dans l'urne.
Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient blanches ?

Correction :
On pose A : « les n premières boules tirées sont blanches »
et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, B_k : « La $k$ème boule tirée est blanche ».
On a alors : $A = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$
D'après la formule des probabilités composées,

$$P(A) = P(B_1) \times P(B_2/B_1) \times \cdots \times P\left(B_n/B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}\right).$$

Sachant $B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}$, il reste dans l'urne $n+1$ boules dont une blanche.
$P(A) = \dfrac{n}{2n} \times \dfrac{n-1}{2n-1} \times \cdots \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$
La probabilité que les n premières boules tirées soient blanches est $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Gammes du jeudi 16 octobre 2025

1 Parmi cent dés cubiques, vingt-cinq sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit $\frac{1}{2}$ et que les autres numéros aient la même probabilité d'apparaître. Les autres dés ne sont pas pipés.
On prend un dé au hasard parmi les cent et on le lance. On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Correction :
Notons A l'événement « Le dé est pipé » et B l'événement « Obtenir un 6 ».
On doit calculer $P_B(A)$.

$(A, \overline{A})$ est un système complet d'événement. D'après la formule de Bayes,
$P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})}$
Or $P(A) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{3}{4}$. $\quad P(B/\overline{A}) = \dfrac{1}{6}$ car il y a équiprobabilité. $\quad P_A(B) = \dfrac{1}{2}$

Donc $P_B(A) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \dfrac{1}{2}$.
La probabilité que le dé soit pipé sachant que l'on a obtenu 6 est $\frac{1}{2}$.

Gamme du mardi 4 novembre 2025

1 Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire les boules une à une au hasard jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X et le nombre moyen de tirages nécessaires.

Correction :

$X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.

On note B_i (resp N_i) : « on obtient une blanche (resp. noire) au $_i$ème tirage.

On adopte la notation $A \cap B = AB$.

$$P(X = 2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2/B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(B_1N_2B_3 \cup N_1B_2B_3 \cup N_1N_2N_3) \\ &= P(B_1N_2B_3) + P(N_1B_2B_3) + P(N_1N_2N_3) \text{ par incompatibilité} \\ &= P(B_1)P_{B_1}(N_2)P_{B_1N_2}(B_3) + P(N_1)P_{N_1}(B_2)P_{N_1B_2}(B_3) + P(N_1)P \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times 3 = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$P(X = 4) = 1 - P(X = 2) - P(X = 3) = \frac{6}{10}$$

Le nombre moyen de tirages nécessaires correspond à $E(X)$.

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{6}{10} = \frac{2 + 9 + 24}{10} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

Gammes du jeudi 6 novembre 2025

1 Une urne contient 10 boules blanches et 20 boules vertes.
On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et déterminer leur valeur.

Correction :

1. $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, On note B_k : « on obtient une blanche au $k$ème tirage » et $V_k = \overline{B_k}$.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} = [\![2, +\infty[\![$.

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P\big((V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1} \cap B_n) \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap V_n)\big) \\ &= P(V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1} \cap B_n) + P(B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap V_n) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(V_1)\dots P(V_{n-1}) \times P(B_n) + P(B_1)\dots P(B_{n-1}) \times P(V_n) \quad \text{par indépendance.} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2. • $E(X)$ existe si $\sum kP(X=k)$ converge absolument qui revient à la convergence car la série est à termes positifs.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} k\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 1\right) + \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 1\right) \end{aligned}$$

On reconnait deux séries géométriques dérivées qui convergent car $|\frac{1}{3}| < 1$ et $|\frac{2}{3}| < 1$.
Donc $\sum kP(X=k)$ converge : X a une espérance.

De plus

$$E(X)=\sum_{k=2}^{+\infty}kP(X=k)=\frac{1}{3}.\left(\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}-1\right)+\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-1\right)$$
$$=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}-1\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}-1\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times 8+\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{16}{6}+\frac{5}{6}=\frac{21}{6}$$

Donc $\boxed{E(X)=\frac{7}{2}}$.

•D'après le théorème de transfert, $E(X^2)$ existe ssi $\sum n^2P(X=n)$ converge absolument.

La série $\sum k^2P(X=k)$ converge absolument ssi elle converge car $k^2P(X=k)\geq 0$.

$$\sum_{k=2}^{n}k^2P(X=k)=\sum_{k=2}^{n}k^2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{2}{3}\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{n}(k(k-1)+k)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}+\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}+\sum_{k=2}^{n}k\left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)$$
$$=\frac{2}{9}\left(\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}+\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\right)+S_n$$

On reconnait des séries géométriques dérivées et dérivées secondes, qui convergent car $|\frac{1}{3}|<1$ et $|\frac{2}{3}|<1$.
Ainsi, $\sum k^2P(X=k)$ converge donc converge absolument donc d'après le théorème de transfert, $E(X^2)$ existe

et $E(X^2)=\sum_{k=2}^{+\infty}k^2P(X=k)=\frac{2}{9}\times\frac{2}{(1-\frac{2}{3})^3}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3}+\frac{7}{2}$

$$=\frac{2}{9}\times 2\times 3^3+\frac{2}{9}\times 2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{7}{2}=12+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=17$$

D'après la formule de Koenig Huygens, $V(X)$ existe et $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=17-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{68}{4}-\frac{49}{4}=\frac{17}{4}$

Remarque : On aurait pu calculer $E(X(X-1))$ pour calculer $E(X^2)$.