PROGRAMME DE COLLE N°8

Un élève ne sachant pas son cours n'a pas la moyenne. La colle comportera une question de cours sans démonstration puis un ou plusieurs exercices.

COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

- **Couples de variables aléatoires** : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.
- **Indépendance de deux variables aléatoires** : définition, propriétés
- **Exemples de loi de variables du type** $u(X, Y)$: loi du $\min(X, Y)$ ou du $\max(X, Y)$ pour X et Y indépendantes, loi de la somme de deux var discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, application à la somme de deux variables aléatoires suivant des lois Bernoulli et à la somme de deux variables aléatoires suivant des lois de Poisson.
- **Théorème de transfert et ses applications** : Théorème de transfert pour les couples de variables aléatoires discrètes finies, covariance (définition + propriétés), formule de Huyghens, lien entre la covariance et indépendance, linéarité de l'espérance, espérance d'un produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes, variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes (indépendantes ou non).
- **Généralisation :** Espérance d'une somme de n variables aléatoires, indépendance de n variables aléatoires, espérance d'un produit de n var indépendantes, variance de la somme de n variables aléatoires indépendantes, somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre p, binomiale de paramètres (n_k, p) (HP), de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_k)$)

INFORMATIQUE

Révisions des instructions `If`, `for` , `while` , les listes, `random()`, `randint(a,b)` , `choice(L)` et les programmes pour les variables aléatoires suivant une loi usuelle (sauf pour la loi de Poisson). On revu des simulations d'expériences aléatoires , de variables aléatoires et des estimations de proba ou d'espérance.

Questions de cours

✓ **Couples de VARD**

1) Comment déterminer les lois marginales d'un couple (X, Y) si l'on connaît la loi conjointe.
2) Connaissant la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définir la loi conditionnelle de X sachant que $Y = k$ pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(Y = k) \neq 0$.
3) Enoncer la notion d'indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.
4) Comment déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ si l'on connaît la loi conjointe.
5) Formule de l'espérance de $Z = u(X, Y)$ où X et Y sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![1; n]\!]$ et u une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
6) Définir la covariance de deux variables aléatoires réelles discrètes et donner le lien entre l'indépendance de deux variables indépendantes et leur covariance.
7) Variance de la différence de deux variables aléatoires discrètes. Cas particulier où les deux variables aléatoires sont indépendantes.
8) Que peut-on dire de l'espérance d'un produit et la variance d'une somme de n variables aléatoires indépendantes ?
9) Loi de la somme de n variables $X_1, .., X_n$ indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
10) Loi de la somme de n variables $X_1, .., X_n$ indépendantes telle que X_k suive une loi Poisson $\mathcal{P}(\lambda_k)$ avec $\lambda_k > 0$.