TD N°7 : Couples de variables discrètes

Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles

1 On effectue des lancers successifs et indépendants avec d'une pièce truquée, qui donne Pile avec une probabilité p. Soit N la var égale au nombre de lancers que l'on doit effectuer pour obtenir pour la première fois pile.
Si Pile est obtenu pour la première fois au n-ème lancer, on effectue alors n lancers d'un dé équilibré et on note X le nombre de 6 obtenus lors de cette série de lancers. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X).

2 ♥ Soit n un entier naturel non nul, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![0, n]\!] \times [\![0, 2n]\!]$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, 2n]\!], P([X = i] \cap [Y = j]) = q^{3n} \binom{n}{i}\binom{2n}{j}\left(\frac{p}{q}\right)^{i+j} = p_{i,j}.$$

1) Calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,2n]\!]} p_{i,j}$.
2) Donner les lois marginales du couple (X, Y)
3) X et Y sont-elles indépendantes ? Donner $E(XY)$
4) Donner la loi conditionnelle de Y sachant que $[X = n]$.

3 Soit (X, Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \mathrm{e}^{-1} \frac{i+j}{i!j!2^{i+j}}.$$

1) Déterminer les lois marginales. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2) Soit k un entier naturel fixé. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $[X = k]$. Quelle est la loi conditionnelle de $Y - 1$ sachant $[X = 0]$?

Utilisation de l'indépendance

4 Julie et Julien lancent, chacun, une pièce de monnaie dont la probabilité d'obtenir Pile vaut p ($p \in]0, 1[$). Les lancers de Julie sont supposés indépendants de ceux de Julien.
On note X la variable aléatoire égale au numéro du lancer du premier Pile pour Julie et Y la variable aléatoire égale au numéro du lancer du premier Pile pour Julien.

1) ♥ Déterminer $P(X = Y)$
2) ♥ Calculer $P(X > Y)$
3) ♥ Calculer $P(X > nY)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
4) Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Retrouver le résultat de la question 2.

5 ♥ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une uniforme sur $[\![0, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer $E(\min(X, Y))$.

6 Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y le numéro du deuxième jeton tiré. Déterminer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

7 ♥ **(Fonction génératrice d'une var)**
X désigne une variable à valeurs dans I, un sous ensemble de $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de X la fonction G_X définie sur $\mathbb{R}$ par $G_X(t) = \sum_{n\in I} t^n P(X = n)$ en tout élément t réel où la série de terme général $t^n P(X = n)$ est absolument convergente ou une somme finie de termes.

1. On suppose dans cette question que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   a) Exprimer $G_X(t)$ à l'aide d'une espérance lorsque la série de terme général $t^n P(X = n)$ est absolument convergente ?
   b) Montrer que G_X est définie en tout point de $[-1, 1]$. Que vaut $G_X(1)$?
   c) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

2. On suppose que X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
   Pour quelles valeurs de t, G_X est-elle définie ?
   Exprimer $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de G'_X et G''_X pour une variable aléatoire
3. a) Montrer que deux variables X et Y discrètes finies à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
   b) Montrer que si X et Y sont deux var discrètes finies indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
4. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
5. Montrer que si X et Y sont indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) et (m, p), alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(n+m, p)$. (On redémontre le résultat du cours en utilisant les fonctions génératrices.)

Généralisation

8 Soit U, V ,W trois variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que U et W suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et V suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Déterminer les lois de X et de Y
2. Calculer $\text{Cov}\,(X, Y)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$
   a) Déterminer la loi conditionnelle de V sachant que $[X = n]$.
   b) En déduire l'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est égale à $\lambda + \dfrac{n\mu}{\lambda + \mu}$.
   On appelle espérance conditionnelle de Y sachant $[X = n]$, notée $E(Y/[X = n])$ quand elle existe, le réel :
   $$E(Y/[X = n]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P_{[X=n]}([Y = y]).$$
   c) Montrer que cette espérance est supérieure ou égale à n si et seulement si $E(X) \geqslant n$.

9 Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0, 1[$).

1) Calculer après avoir prouvé son existence, calculer $E(s^X)$ et $E(s^{X+Y})$ pour s un réel tel que $|s| < 1$
2) Préciser la loi de $S = X + Y$, son espérance et sa variance.
3) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $[X + Y = n]$ ainsi que son espérance.
4) Calculer $P(S \leqslant Z)$.

10 **(minimum et maximum de variables indépendantes)**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots X_n$ n variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$)
   a) Déterminer la loi de $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
   b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de $W = \min(X_1, m)$
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $Y_1, \dots, Y_N$ N variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la loi de $W_N = \max(Y_1, \dots, Y_N)$.

11 Soit p un nombre réel de l'intervalle $]0, 1[$.
On considère une suite $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
On étudie la variable X telle que :

- s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_1 = T_2 = ... = T_k \neq T_{k+1}$ alors $X = k$,
- sinon $X = 0$.

(X est la longueur de la première suite de résultats identiques.)

1) Déterminer la loi et l'espérance de X.
2) Dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$, a-t-on avantage à parier sur "X pair" ou "X impair" ?

12 **(Une somme avec un nombre aléatoire de termes (d'après Agro-Veto))**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit N une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On définit alors une variable aléatoire Y par :

$$Y = \begin{cases} 0 \text{ si } N = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} X_k \text{ si } N \neq 0 \end{cases}.$$

1) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $S_r = \sum\limits_{k=1}^{r} X_k$
2) Calculer $P(Y=0)$ et $P(Y=r)$ pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$
3) Déterminer l'espérance de Y si elle existe.

13 **(Un produit avec un nombre aléatoire de termes)**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit N une variable aléatoire qui suit une loi de géométrique de paramètre p, indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On définit alors une variable aléatoire T par :

$$T = \prod_{i=1}^{N} X_i.$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conditionnelle de T sachant $[N=n]$.
2) Montrer que T suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre.
3) Déterminer l'espérance et la variance de T.

14 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $Y_n = X_n + X_{n+1}$.
1) Déterminer la loi de Y_n et calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de p.
2) On note $T_n = \dfrac{Y_1 + .. + Y_n}{n}$. Calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.
3) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - 2p| \geqslant \epsilon) = 0$
4) Pourquoi ne peut-on pas appliquer la loi faible des grands nombres ?

15 **(Loi de Pascal ou temps du n-ième succès)**
Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
1) Déterminer $S_n(\Omega)$ et montrer que :

$$\forall k \in S_n(\Omega), P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

2) En déduire $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.
3) Calculer l'espérance et la variance de S_n.
4) Démontrer que $\forall \epsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|\frac{S_n}{n} - \dfrac{1}{p}| \geqslant \epsilon\right) = 0$.

Ecrit Agro Veto MCR 2021 : Modèle d'évolution de Wright-Fisher

---

16 Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $[\![0;2N]\!]$ et on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[\![0;2N]\!]$ vérifiant, pour tout entier n,

$$\forall (i,j) \in [\![0;2N]\!]^2, \quad P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=j) = \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}.$$

Pour un variant génétique biallélique (dont les allèles sont notés A et a) et dans le cadre du modèle de Wright-Fisher, X_n représente le nombre d'allèles de type A à la génération n dans une population finie de taille N.

1. Etude du cas particulier où $N = 1$

a) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, exprimer $P(X_{n+1}=0)$, $P(X_{n+1}=1)$ et $P(X_{n+1}=2)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $E(X_n) = E(X_0)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n \in \{0,2\}) = 1$

On suppose désormais que $N \geqslant 1$.
On cherche à généraliser les résultats de la question 1.b) et 1.c)

2. a) Soit $i \in [\![0;2N]\!]$. Donner une interprétation probabiliste de la somme

$$S_i = \sum_{j=0}^{2N} j \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

et en déduire sa valeur.

b) En déduire que, pour tout entier n, on a $E\left(X_{n+1}\right) = E\left(X_n\right)$.

c) Interpréter le résultat obtenu.

3. On considère la suite u de terme général $u_n = \mathbb{P}\left(X_n \in \{0;2N\}\right)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1;2N-1]\!]$.
Montrer que $P_{[X_n=k]}\left(X_{n+1} \in \{0;2N\}\right) \geqslant 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.

b) En déduire que, pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n + 2(1-u_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.

c) Soit α un réel appartenant à $]0;1[$. On considère la suite w définie par :

$$w_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = w_n + \alpha(1-w_n).$$

Justifier que la suite w est convergente et donner sa limite.

d) Conclure et interpréter le résultat obtenu.

Corrections

14 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

1) Comme X_n et X_{n+1} sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p, alors d'après le cours, Y_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$.
Ainsi $E(Y_n) = 2p$ et $V(Y_n) = 2p(1-p)$.

2) $T_n = \dfrac{Y_1 + .. + Y_n}{n}$.

- Par linéarité, on a :
$$\begin{aligned} E(T_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) \\ &= \frac{1}{n} \times \sum_{1}^{n} 2p = \frac{2\cancel{n}p}{\cancel{n}} \\ &= 2p \end{aligned}$$
- $V(T_n) = \dfrac{1}{n^2} V(X_1 + 2X_2 + \cdots + 2X_n + X_{n+1})$
Par indépendance des variables $X_1, 2X_2, \cdots, 2X_n$ et X_{n+1}, il vient que :
$$\begin{aligned} V(T_n) &= \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + 4V(X_2) + \cdots + 4V(X_n) + V(X_{n+1})\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(p(1-p) + 4p(1-p)\left(\sum_{k=2}^{n} 1\right) + p(1-p)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(2p(1-p) + 4p(1-p)(n-1)\right) \\ &= \frac{(4n-2)p(1-p)}{n^2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{E(T_n) = 2p \text{ et } V(T_n) = \dfrac{(4n-2)p(1-p)}{n^2}.}$

3) Soit $\epsilon > 0$, T_n admet une variance. On peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable T_n :
$$P\left(|T_n - E(T_n)| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{V(T_n)}{\epsilon^2},$$
Ainsi,
$$0 \leqslant P\left(|T_n - 2p| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{(4n-2)p(1-p)}{n^2\epsilon^2}$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(4n-2)p(1-p)}{n^2\epsilon^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4p(1-p)}{n\epsilon^2} = 0$, alors par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|T_n - 2p| \geqslant \epsilon\right) = 0$.
Donc $\boxed{\text{pour tout } \epsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - 2p| \geqslant \epsilon) = 0.}$

4) On ne peut pas appliquer la loi faible des grands nombres car les variables $Y_1, \cdots, Y_n$ ne sont pas indépendantes.

Correction MCR 2021

https://planet-vie.ens.fr/thematiques/evolution/mecanismes-theories-et-concepts-de-l-evolution/la-derive-genetique

16

1. Etude du cas particulier où $N = 1$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cette partie $N = 1$ donc $X_n(\Omega) = [\![0,2]\!]$ et ainsi la famille $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ forme un système complet d'événements.
Soit $j \in [\![0,2]\!]$.
En appliquant la formule des probabilités totales à l'événement $([X_{n+1} = j])$ avec le système complet $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$, on obtient :
$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{2} P(X_n = i) \times P_{[X_n = i]}(X_{n+1} = j).$$
$$\forall (i,j) \in [\![0,2]\!]^2, P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j) = \binom{2}{j}\left(\frac{i}{2}\right)^j\left(1 - \frac{i}{2}\right)^{2-j}.$$
On fera attention, dans les calculs, au terme 0^0 qui vaut 1. On obtient en remplaçant les probabilités :

$$\boxed{\begin{array}{l} P(X_{n+1}=0)=P(X_n=0)+\dfrac{1}{4}P(X_n=1) \\ P(X_{n+1}=1)=\dfrac{1}{2}P(X_n=1) \\ P(X_{n+1}=2)=\dfrac{1}{4}P(X_n=1)+P(X_n=2) \end{array}}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On peut alors calculer $E(X_{n+1})$:

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= P(X_{n+1}=1)+2P(X_{n+1}=2) \\ &= \frac{1}{2}P(X_n=1)+2\left(\frac{1}{4}P(X_n=1)+P(X_n=2)\right) \\ &= P(X_n=1)+2P(X_n=2) \\ &= E(X_n) \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, elle est donc égale à son premier terme $E(X_0)$. D'où $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ E(X_n)=E(X_0).}$

c) Soit $n\in\mathbb{N}$. Par incompatibilité, il vient que :
$P(X_n\in\{0,2\})=P(X_n=0)+P(X_n=2)=1-P(X_n)$ car $X_n(\Omega)=[\![0,2]\!]$.
Or d'après la question 1)a), la suite $(P(X_n=1))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $P(X_0=1)$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}, P(X_n=1)=P(X_0=1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Ainsi $P(X_n\in\{0,2\})=1-P(X_0=1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Comme $-1<\dfrac{1}{2}<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}P(X_0=1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}P(X_n\in\{0,2\})=1.}$

2. a) Soit $i\in[\![1;2N-1]\!]$.

$$S_i=\sum_{j=0}^{2N} j\binom{2N}{j}\left(\frac{i}{2N}\right)^j\left(1-\frac{i}{2N}\right)^{2N-j}=E(Z)$$

où Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2N,\frac{i}{2N})$

Donc $S_i=2N\times\dfrac{i}{2N}=i$. pour $i=0$, $S_0=0$ et pour $i=2N$, $S_{2N}=2N$ en calculant les sommes.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } i\in[\![0;2N]\!],\ S_i=i.}$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$.
On va calculer $E(X_{n+1})$ en faisant apparaître les termes S_i, grâce à la formule des probabilités totales, en utilisant le SCE $(X_n=i)_{0\leqslant i\leqslant 2N}$.

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{2N} jP(X_{n+1}=j) \\ &= \sum_{j=0}^{2N}\left(j\sum_{i=0}^{2N}P(X_n=i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=j)\right) \quad \text{(probas totales)} \\ &= \sum_{i=0}^{2N}\left(P(X_n=i)\sum_{j=0}^{2N}jP_{[X_n=i]}(X_{n+1}=j)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{2N}P(X_n=i)S_i \\ &= \sum_{i=0}^{2N}iP(X_n=i)=E(X_n). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ E\left(X_{n+1}\right)=E\left(X_n\right).}$

c) $\boxed{\text{La suite } (E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc constante égale à } E(X_0).}$ c'est à dire que le nombre moyen d'allèles de type A à la n-ième génération est le même qu'à l'origine.

3. On considère la suite u de terme général $u_n=\mathbb{P}\left(X_n\in\{0;2N\}\right)$.

a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![1;2N-1]\!]$.
Par incompatibilité, il vient que :

$$\begin{aligned} P_{(X_n=k)}(X_{n+1}\in\{0,2N\}) &= P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=0)+P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=2N) \\ &= \left(\frac{2N-k}{2N}\right)^{2N}+\left(\frac{k}{2N}\right)^{2N}. \end{aligned}$$

Comme $k\geqslant 1$, alors $\left(\frac{k}{2N}\right)^{2N}\geqslant\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.

de plus, $k\leqslant 2N-1$ donc $2N-k\geqslant 1$, ainsi : $\left(\frac{2N-k}{2N}\right)^{2N}\geqslant\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.

Donc $\boxed{P_{(X_n=k)}\left(X_{n+1}\in\{0;2N\}\right)\geqslant 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}.}$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$.
En utilisant la formule des probabilités totales avec le SCE $(X_n=k)_{0\leqslant k\leqslant 2N}$ puis en décrochant les termes en $k=0$ et $k=2N$ et en exploitant la question

3a), il vient que :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{2N} P(X_n=k)\times P_{(X_n=k)}(X_{n+1}\in\{0,2N\})\\
&\geqslant P(X_n=0)\times P_{(X_n=0)}(X_{n+1}\in\{0,2N\})\\
&\quad +P(X_n=2N)\times P_{(X_n=2N)}(X_{n+1}\in\{0,2N\})+2\Big(\frac{1}{2N}\Big)^{2N}\sum_{k=1}^{2N-1}P(X_n=k).
\end{aligned}$$

D'après l'énoncé,

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}\in\{0,2N\})=P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)+P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2N)=1+0=1.$$

De même,

$$P_{(X_n=2N)}(X_{n+1}\in\{0,2N\})=0+1=1.$$

On a donc :

$$u_{n+1}\geqslant P(X_n=0)+P(X_n=2N)+2\Big(\frac{1}{2N}\Big)^{2N}\Big(1-P(X_n=0)-P(X_n=2N)\Big).$$

Enfin, comme $P(X_n=0)+P(X_n=2N)=u_n$, on obtient alors que :

$\boxed{\text{pour tout entier } n, \text{ on a } u_{n+1}\geqslant u_n+2(1-u_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}.}$

c) Soit α un réel appartenant à $]0;1[$.

Remarquons que pour tout entier n, $w_{n+1}=(1-\alpha)w_n+\alpha$.

Montrons par récurrence que pour tout entier n, $\mathcal{P}(n)$: « $w_n\in[0,1]$. » est vraie.

- Initialisation : $n=0$, $w_0=u_0\in[0,1]$ car u_0 est une probabilité. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  Puisque $1>\alpha>0$ et $\mathcal{P}(n)$, on a alors : $0\leqslant(1-\alpha)w_n\leqslant 1-\alpha$.
  Donc $\alpha\leqslant w_{n+1}\leqslant 1$, donc $w_{n+1}\in[0,1]$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, w_n\in[0,1].}$

On en déduit que pour tout entier n, $w_{n+1}-w_n=\alpha(1-w_n)\geqslant 0$.
Ainsi la suite (w_n) est croissante, de plus cette suite est majorée par 1, donc (w_n) converge.

Notons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ et passons à la limite dans l'égalité : $w_{n+1}=w_n+\alpha(1-w_n)$.

On obtient $\ell=\ell+\alpha(1-\ell)$, ce qui équivaut à $\alpha(1-\ell)=0$. Or $\alpha\neq 0$, donc $\ell=1$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ converge vers } 1.}$

Remarque : on pouvait aussi utiliser le fait que (w_n) est une suite arithmético-géométrique pour expliciter w_n et obtenir sa limite.

d) Posons $\alpha=2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$. Puisque $N\in\mathbb{N}^*$, $\alpha\in]0,1[$. Donc le résultat de (c) est applicable. Reprenons la suite (w_n) définie en (c).

Montrons par récurrence que pour tout entier n, $Q(n)$: $u_n\geqslant w_n$.

- $w_0=u_0$ donc $u_0\geqslant w_0$. Ainsi $Q(0)$ est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $Q(n)$ est vraie, c'est à dire que $u_n\geqslant w_n$. Montrons que $Q(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &\geqslant u_n+\alpha(1-u_n) \quad \text{(d'après (b))}\\
&\geqslant \alpha+(1-\alpha)u_n\\
&\geqslant \alpha+(1-\alpha)w_n \quad \text{(d'après } Q(n) \text{ et car } 1-\alpha>0)\\
&\geqslant w_{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $Q(n+1)$ est vraie.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant w_n$.

Comme u_n est une probabilité, alors $u_n\leqslant 1$.

Ainsi on obtient l'encadrement suivant : $w_n\leqslant u_n\leqslant 1$. Or la suite (w_n) converge vers 1.

Donc par encadrement, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 1.}$

Interprétation : il est quasi-certain qu'à un moment donné X_n soit égal à 0 ou à $2N$.

On vient de mettre en évidence un phénomène de dérive génétique.