CH 7 : COUPLES DE VARIABLES DISCRÈTES

Table des matières

Présentation :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Il arrive souvent que l'on ait à travailler simultanément avec plusieurs (voire une infinité de) variables aléatoires sur cet espace avec clairement des problèmes de "dépendance" ou d'"indépendance".

Exemple 1 : On réalise n épreuves de Bernoulli, on note X le nombre de succès. On "retente" chaque expérience où il y a eu un échec, et on note Y le nombre de succès pour cette "deuxième chance".
Il est naturel de s'intéresser au nombre total de succès $S = X + Y$, ce qui va sûrement nécessiter l'étude conjointe de X et de Y.

Dans la suite du paragraphe X et Y sont deux var définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

I Couple de variables aléatoires discrètes

1 Loi d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes ou loi conjointe

Définition 1 - Couple

Un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application définie par :

$$\begin{cases} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}.$$

Définition 2 - Loi conjointe d'un couple

La loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles est caractérisée par la donnée de :

$$P([X = x] \cap [Y = y]) \text{ pour tout } (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Remarque : L'événement $([X = x] \cap [Y = y])$ peut-être également noté $(X = x, Y = y)$.

Exemple 2 : Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On effectue deux tirages avec remise et on note X et Y les résultats respectifs des deux tirages. On note Z le plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Z).

Exemple 3 : ♥On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On note X le numéro de la boule obtenue au premier tirage et Y celui de la boule obtenue au second tirage.
Déterminer la loi du couple (X, Y).

Remarque : L'univers-image d'un couple est seulement une partie de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, il n'y a pas nécessairement égalité (voir l'exemple précédent).
Avec la convention habituelle, on attribue une probabilité nulle aux événements impossibles.

2 Lois marginales

Définition 3 - Lois marginales

Soit (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur Ω.
La loi de X est appelée la première loi marginale du couple et la loi de Y est la deuxième.

Proposition 1

On connait la loi du couple (X, Y). Alors on peut obtenir les lois marginales :

$$\forall\, x \in X(\Omega),\ P([X=x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X=x] \cap [Y=y]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{[Y=y]}([X=x])P([Y=y]),$$

$$\forall\, y \in Y(\Omega),\ P([Y=y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([Y=y] \cap [X=x]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P_{[X=x]}([Y=y])P([X=x])$$

Démonstration : On obtient les lois marginales à l'aide d'un système complet d'événements et de la formule des probabilités totales.

□

Exemple 4 **:** ♥Une urne contient deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 0.

- **Expérience 1** : On tire deux boules avec remise et on note X le numéro de la première boule et Y le numéro de la 2-ième boule. Calculer la loi conjointe du couple (X, Y) et les deux lois marginales.
- **Expérience 2** : On tire deux boules sans remise et on note X le numéro de la première boule et Y le numéro de la 2-ième boule. Calculer la loi conjointe du couple (X, Y) et les deux lois marginales.

Déterminer les lois de couples et les lois marginales pour les deux expériences ci dessus.

On a, après calculs, dans les 2 expériences ci-dessus les mêmes lois marginales mais pas la même loi conjointe. On peut obtenir les lois marginales du couple à partir de la loi conjointe mais attention la réciproque est fausse.

Exemple 5 **:** ♥On considère le couple (X, Y) dont la loi est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, P((X=i) \cap (Y=j)) = e^{-5}\frac{2^i 3^j}{i!j!}.$$

Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

3 Lois conditionnelles

Définition 4 - Lois conditionnelles

Pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes.

- Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, on définit la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ par :
$$\forall x \in X(\Omega), P_{[Y=y]}(X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(Y = y)}.$$
- Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$, on définit la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ par :
$$\forall y \in Y(\Omega), P_{[X=x]}(Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

Exemple 6 **:** ♥♥Dans une station de ski on peut se rendre aux départs respectifs des pistes A et B par deux remontées mécaniques qui partent du même point D de la station. Le nombre de skieurs qui se présentent en D pendant une heure est un variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . On admet que chaque skieur choisit indépendamment A ou B avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de skieurs qui choisissent A pendant 1 heure.

1) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $(N = n)$ est réalisé.
2) Déterminer la loi de X.
3) Calculer le nombre moyen de skieurs se présentant pendant 1 heure au départ de la piste A.

II Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 5 - Indépendance de deux vard

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si
$$\forall\, x \in X(\Omega),\ \forall\, y \in Y(\Omega),\ P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Remarques :

1) Lorsque deux variables aléatoires sont **indépendantes**, la loi conjointe du couple est alors entièrement déterminée par les lois marginales.
2) Lorsque deux variables aléatoires sont **indépendantes**, alors toutes les lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$ sont les mêmes et égales à la loi de Y (de même les lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ sont égales à la loi de X.

Exemple 7 **:** ♥Dans l'exemple 5, les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Non indépendance de deux variables aléatoires

La présence d'un $P((X=x)\cap(Y=y))=0$ peut traduire la non indépendance.
En effet, si l'on trouve $x\in X(\Omega)$ et $y\in Y(\Omega)$ tels que
$P(X=x)\times P(Y=y)\neq 0$ et $P((X=x)\cap(Y=y))=0$.
Alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Exemple 8 **:** ♥Dans l'exemple 4, les variables X et Y sont-elles indépendantes ? (On distinguera les deux expériences)

Propriété 1

Deux variables X et Y sont indépendantes si et seulement pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$,

$$P([X\in I]\cap[Y\in J])=P(X\in I)P(Y\in J).$$

Exemple 9 **:** Si X et Y sont indépendantes, alors
$P(X\leqslant 4, 0<Y\leqslant 2)=P(X\leqslant 4)P(0<Y\leqslant 2)$.

Propriété 2

Si X et Y sont indépendantes,
alors pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$ et toute fonction g définie sur $Y(\Omega)$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi des variables aléatoires indépendantes.

Exemple 10 **:** Si X et Y sont indépendantes, alors X^2+2 et e^Y sont indépendantes.

III Exemples de variables aléatoires de la forme $u(X,Y)$

1 Exemple simple

$X\backslash Y$	-1	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
Loi de Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

1. Montrer que X et Y sont indépendantes.
2. Donner la loi de $Z=X+Y$
3. Donner la loi de $W=X-Y$
4. Donner la loi de $T=\max(X,Y)$
5. Donner la loi de $V=XY$.

2 Loi d'un minimum et d'un maximum

Loi d'un minimum et d'un maximum de deux vard indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.
On cherche la loi de $Z = \max(X, Y)$ ou de $W = \min(X, Y)$. Pour cela on calcule d'abord la fonction de répartition :

- Pour le max : on calcule $P(Z \leqslant k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
- Pour le min : on calcule $P(W > k)$ pour tout $k \in W(\Omega)$.
- Puis dans les deux cas, on calcule la loi de la variable aléatoire avec des formules du type :

$$P(Z = k) = P(Z \leqslant k) - P(Z \leqslant k-1) \text{ ou } P(W = k) = P(W > k-1) - P(W > k).$$

Exemple 11 **:** On lance deux dés à 6 faces. On note X et Y les numéros obtenus par chaque dé.
On pose $W = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de W.

Exemple 12 **:** ♥ $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ indépendantes. On note $Z = \max(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.

3 Loi d'une somme de deux variables aléatoires discrètes

Proposition 2 - Loi de la somme de deux vard

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes.
Alors $Z = X + Y$ est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall z \in Z(\Omega), P(Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = z - x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = z - y, Y = y).$$

Démonstration : □

Exemple 13 **:** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Déterminer la loi de $X + Y$.

Proposition 3 - Somme de variables de Bernoulli indépendantes

Si X_1 et X_2 sont deux variables **indépendantes** qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p ($0 < p < 1$),

alors $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$.

Démonstration : $\square$

Proposition 4 - Cas particulier deux deux vard à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors $Z = X + Y$ est une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{N},\ P(X+Y=z) = \sum_{x=0}^{z} P(X=x, Y=z-x) = \sum_{y=0}^{z} P(X=z-y, Y=y).$$

Démonstration :

$\square$

Proposition 5 - Somme de variables de Poisson indépendantes

Si X_1 et X_2 sont deux variables **indépendantes** qui suivent respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$,

alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Démonstration : ♥

$\square$

IV Théorème de transfert et ses applications

1 Théorème de transfert pour les couples de vard finies

Théorème 1 - Théorème de transfert pour un couple

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies et u une fonction définie sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$.
Alors $E(u(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} u(x,y)P([X=x],[Y=y])$ (somme finie double)

Remarque : $E(u(X,Y)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} u(x,y)P([X=x],[Y=y]) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \sum_{x\in X(\Omega)} u(x,y)P([X=x],[Y=y])$.

Exemple 14 : ♥Calculer $E(XY)$ pour X et Y deux variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli.

Exemple 15 : Calculer $E(XY)$ pour les variables aléatoires X et Y de l'ex 4, expérience 2.

Exemple 16 : Démontrons la linéarité de l'espérance pour deux vard finies.

2 Qu'est ce que la Covariance de deux variables aléatoires ? Comment la calculer ?

Nous allons introduire un réel qui "mesure" le degré de dépendance de deux var discrètes : la Covariance.

Définition 6 - Covariance

On définit la covariance de X et de Y par :

$$\text{Cov}\,(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))).$$

Proposition 6 - Calcul pratique, formule de Huygens

$$\text{Cov}\,(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

où $E(XY)$ est obtenu à l'aide du théorème de transfert lorsque X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies .

Exemple 17 : ♥Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On en tire deux successivement sans remise. On note X (resp. Y) la var de Bernoulli égale à 1 si la première boule tirée est blanche (resp la 2-ème) et 0 sinon. Calculons $\text{Cov}\,(X,Y)$.

Sens de la Covariance :

Si X et Y ont tendance à être en même temps au dessus de leur moyenne (ou en dessous), le nombre $(X-E(X))(Y-E(Y))$ est positif, et cela donne une covariance positive.
Si « quand X est grand, cela "pousse" Y à être grand », la covariance sera positive.
En revanche si $(X-E(X))$ et $(Y-E(Y))$ sont souvent de signes opposés, cela donnera plutôt une covariance négative.

Propriété 3 - Propriétés de la Covariance

Pour X,Y, X', Y' des variables aléatoires définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{T}, P)$,

1. $\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,X)$. (symétrie)
2. $\operatorname{Cov}(X,X) = V(X)$.
3. Si X est une var constante égale à un réel a, alors $\operatorname{Cov}(a,Y) = 0$.
4. bilinéarité: pour α, β des réels:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(\alpha X + \beta X', Y) &= \alpha \operatorname{Cov}(X,Y) + \beta \operatorname{Cov}(X',Y) \\ \operatorname{Cov}(X, \alpha Y + \beta Y') &= \alpha \operatorname{Cov}(X,Y) + \beta \operatorname{Cov}(X,Y'). \end{aligned}$$

5. $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)$.

Démonstration : □

Remarque : $V(X-Y) = V(X+(-Y)) = V(X) + V(-Y) + 2\operatorname{Cov}(X,-Y) = V(X) + V(Y) - 2\operatorname{Cov}(X,Y)$

Exemple 18 **:** "Développer" $\operatorname{Cov}(3X-2Y, 5X-4Y)$.

3 Covariance et indépendance

Proposition 7

Si X et Y, admettant un moment d'ordre 2, sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}\,(X,Y)=0$.
On dit que X et Y sont non corrélées.

Remarques : 1) ⚠ La réciproque de la propriété est fausse.
2) Dans la pratique, on utilise souvent la contraposée :
"si $\mathrm{Cov}\,(X,Y)\neq 0$, alors X et Y ne sont pas indépendantes ".

Proposition 8 - Espérance d'un produit de deux variables indépendantes (Admis)

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant chacune un moment d'ordre 2,

alors $X\times Y$ admet une espérance et $E(XY)=E(X)E(Y)$.

Proposition 9 - Variance d'une somme de deux variables indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant chacune une variance, alors

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y).$$

Démonstration : Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant chacune une variance. Alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,\mathrm{Cov}\,(X,Y)$.
Or $\mathrm{Cov}\,(X,Y)=0$ donc $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$. □

Remarque : Sous les même hypothèses, $V(X-Y)=V(X)+V(Y)=V(X+Y)$.

4 Résumé, méthode de calcul de la covariance

Méthode de calcul de la covariance

- Si les variables X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}\,(X,Y)=0$.
- Sinon, on peut appliquer la formule de Koenig-Huyghens : $\mathrm{Cov}\,(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.
- Dans certains cas, la **propriété 3. point 5.** permet de déterminer simplement $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ sans que l'on ait à calculer $E(XY)$.
  Il suffit de connaître les trois variances $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X+Y)$. Pensez-y lorsque X et Y suivent des lois classiques et qu'on sait déterminer la loi de $X+Y$ facilement (stabilité ou autre). En effet, dans ce cas :
  $$\mathrm{Cov}\,(X,Y)=\frac{1}{2}(V(X+Y)-V(X)-V(Y)).$$

Exemple 19 : ♥ Une urne contient des boules de couleurs C_1, C_2 et C_3 en proportion p_1, p_2 et p_3 avec $p_1+p_2+p_3=1$. On effectue n tirages avec remise dans cette urne et on note X_i le nombre de boules de couleur C_i tirées. Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_i,X_j)$

V Généralisation

Dans cette partie, on étend les notion de couple de variables aléatoires à un vecteur de variables aléatoires.

1 Loi d'un vecteur de n variables aléatoires discrètes

Définition et Caractérisation de la loi d'un vecteur discret

Soit $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires discrètes sur Ω.

l'application $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \omega & \longmapsto & (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)) \end{array}$ est un vecteur aléatoire discret.

- Donner sa loi signifie donner :
  $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}[X_i = x_i]\right)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.
- Les lois marginales du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ sont les lois de $X_1, \cdots, X_n$

2 Espérance d'une somme de n variables

Définition 7 - Espérance d'une somme de n variables

Soit $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires admettant chacune une espérance.

Alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ admet une espérance et $E(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$.

<u>**Démonstration :**</u> (Démonstration par récurrence) □

3 Indépendance de n variables

Définition 8 - Caractérisation de l'indépendance mutuelle de n variables discrètes

Soit $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles discrètes.

Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega), P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left([X_i = x_i]\right).$$

Remarque : Quand on dit que n var sont indépendantes, cela signifie qu'elles sont mutuellement indépendantes.

Propriété 4 - Exploitation de l'indépendance mutuelle

- Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.
- Si $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors pour tous fonctions u et v sous de bonnes hypothèses, $u(X_1, \cdots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \cdots, X_{n+p})$ sont indépendantes.
- Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors pour toutes fonctions $u_1, \cdots, u_n$ définie sur $\mathbb{R}$, $u_1(X_1), \cdots, u_n(X_n)$ sont indépendantes.

Exemple 20 **:** Soit X, Y, Z et T des var discrètes mutuellement indépendantes. Alors

- X, Y et T sont indépendantes.
- $X^2 + Y$ et ZT sont indépendantes.
- $X - 1$, $2Y$, e^Z et $\dfrac{3T+2}{T+1}$ sont indépendantes.

Exemple 21 **:** Soit $n+1$ variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \cdots, X_{n+1}$. Que peut-on dire de X_{n+1} et de $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$?

4 Généralisation de l'espérance d'un produit et de la variance d'une somme de n var indépendantes

Proposition 10 - Espérance d'un produit de variables indépendantes

Soit X_1,..., X_n n var mutuellement indépendantes admettant chacune une espérance.
Alors $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ admet aussi une espérance et

$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Démonstration : ♥ **(par récurrence)** □

Proposition 11 - Variance d'une somme de variables indépendantes

Soit X_1,..., X_n mutuellement indépendantes admettant une variance.
Alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ admet aussi une variance et

$$V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n),$$

et pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$ admet une variance et

$$V(a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + ... + a_n^2 V(X_n).$$

Démonstration : (par récurrence) □

5 Somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes

Toutes les démonstrations des propositions suivantes se font par récurrence sauf pour la loi binomiale.

Proposition 12 - Somme de var indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli

La somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli **, de même paramètre** p, suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Remarque : Ceci permet de retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Proposition 13 - Somme de var indépendantes qui suivent des lois binomiales

Si $X_1, \dots, X_k$ sont k variables aléatoires indépendantes telles que pour tout i dans $[\![1, k]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$,

$$\text{Alors} \quad \sum_{i=1}^{k} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\sum_{i=1}^{k} n_i, p).$$

Explications :

Proposition 14 - Somme de var indépendantes qui suivent des lois de Poisson

Si $X_1, \dots, X_k$ sont k variables aléatoires indépendantes telles que pour tout i dans $[\![1, k]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$.

$$\text{Alors} \quad \sum_{i=1}^{k} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i).$$

Démonstration : ♥

□

VI Loi faible des grands nombres

Proposition 15 - Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.e de même loi) , d'espérance m et de variance σ^2.
Alors :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$$

Démonstration :

□

Remarque : On a aussi $\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| < \epsilon\right) = 1.$ avec les mêmes hypothèses.

Remarque : On peut interpréter cette proposition de la manière suivante : plus n est grand, plus il est probable que les valeurs prises par la moyenne empirique soient proches de m. **Cela justifie la démarche informatique pour estimer une espérance**.

Remarque : Cette proposition marche aussi lorsque les var sont deux à deux indépendantes et quand les X_n sont discrètes, il suffit qu'elles soient deux à deux non corrélées.

Exemple 22 **:** On lance un dé cubique, non pipé, dont les faces sont numérotés de 1 à 6. On note X le nombre de points marqués lors d'un lancer de dé.
On a alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$, d'espérance $\mu = \dfrac{7}{2}$ et de variance $\sigma^2 = \dfrac{35}{12}$.
Déterminer le nombre de lancers suffisants pour que la moyenne empirique du nombre de points marqués soit égale à 3.5 plus ou moins 0.1 ait au moins 8 chances sur 10 d'être réalisé.(risque d'erreur 20%)

Cas particulier de variables de Bernoulli :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de même loi de Bernoulli de paramètre p, indépendantes deux à deux , alors
En posant, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, on obtient que :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - p\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$$

Interprétation : Ce théorème permet une justification partielle, a posteriori, de la notion de probabilité d'un événement introduite intuitivement :
En effet, si X_k est la variable aléatoire de Bernoulli associé à la réalisation d'un événement A au cours de la k-ième épreuve d'une suite d'épreuves indépendantes, $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ est la fréquence de réalisation de A au cours des épreuves de 1 à n et la loi faible des grands nombres prouve que lorsque l'on répète un grand nombre de fois cette même expérience de Bernoulli, cette fréquence est presque sûrement proche de p.
Cela permet de justifier la démarche informatique pour estimer une probabilité.