2BCPST1 Corrigé du DS2 de modélisation (durée 3h) samedi 8 novembre 2025

N.B. Le corrigé des questions d'informatique se trouve à la fin de ce document.

PARTIE I : FONCTION GENERATRICE D'UNE VARIABLE DISCRETE

B) Cas d'une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs entières

1. Comme $X(\Omega)\subset\{0,1,...,n\}$, le système $\left((X=k)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements, d'où :

$$\boxed{f(1)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1}.$$

2. La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale, et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f'(x)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)kx^{k-1}$, donc en particulier : $\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=f'(1)}$.

3. De même, $f''(x)=\sum_{k=2}^{n}P(X=k)k(k-1)x^{k-2}$, donc:

$$f''(1)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)P(X=k)=E\left(X(X-1)\right)=E\left(X^2-X\right)$$

et $E\left(X^2\right)=E\left(X^2-X\right)+E(X)=f''(1)+f'(1)$, d'où :

$$\boxed{V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=f''(1)+f'(1)-\left(f'(1)\right)^2}$$

4. On a $X(\Omega)=\{0,1,...,n\}$ et pour $0\le k\le n$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, d'où pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}x^k=(px+1-p)^n.$$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)==np(px+1-p)^{n-1}$ et $f'(x)==n(n-1)p^2(px+1-p)^{n-2}$.

En particulier, $f'(1)==np$ et $f'(1)==n(n-1)p^2$. On retrouve donc $\boxed{E(X)=np}$

et $V(X)=n(n-1)p^2+np-n^2p^2$, donc $\boxed{V(X)=np(1-p)=npq}$

5. La liste **[0, 0.2, 0,2, 0,2, 0,2 ,0,2]** correspond au cas d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5\}$ et a pour espérance 3.

L'instruction **print((deriv ([0, 0.2, 0,2, 0,2, 0,2 ,0,2],1))** renvoie la dérivée en 1 de la fonction génératrice de cette variable, qui correspond bien à son espérance.

C) Cas d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $a_n=P(X=n)$, donc $a_n\ge 0$. Et le système $\left((X=n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, donc $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=1$.

2. Soit $x\in[0,1]$, on a alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\le a_nx^n\le a_n$, or la série $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge, donc par le théorème de comparaison pour les séries positives la série $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ converge.

3. On désigne par f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$.

3. a. Dans ce cas on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=pq^{n-1}$, et pour tout $x\in[0,1]$,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}pq^{n-1}x^n=\frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}q^nx^n=\frac{p}{q}\sum_{k=0}^{+\infty}(qx)^{k+1}=\frac{p}{q}\times\frac{qx}{1-qx}=\frac{px}{1-qx}$$

b. f est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x\in[0,1]$, $f'(x)=\frac{p(1-qx)-px(-q)}{(1-qx)^2}=\frac{p}{(1-qx)^2}$, et en particulier f est dérivable en 1, et $f'(1)=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$ d'où on retrouve avec le résultat admis :

$$\boxed{E(X)=\frac{1}{p}}$$

PARTIE II : LE PARADOXE DE WALTER PENNEY

A) Etude théorique

1.a Lors d'un seul lancer on ne peut avoir deux piles consécutifs, donc $\boxed{d_1=1}$

L'événement contraire de D_2 est $\overline{D_2}=P_1\cap P_2$, et par indépendance : $\mathbb{P}\left(\overline{D_2}\right)=\mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)=\frac{1}{4}$

On a $\mathbb{P}(D_2)=1-\mathbb{P}\left(\overline{D_2}\right)$, donc $\boxed{d_2=\frac{3}{4}}$

1.b Comme (F_1,P_1) est un système complet d'événements on a par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D_{n+2})=\mathbb{P}(D_{n+2}\cap F_1)+\mathbb{P}(D_{n+2}\cap P_1)$$

$D_{n+2}\cap F_1$ est l'événement : « on obtient face au premier lancer et on n'obtient jamais deux piles de suite au cours des $n+2$ premiers lancers ».

Donc $D_{n+2}\cap F_1=F_1\cap C_n$ où C_n est l'événement : « on n'obtient jamais deux piles de suite entre le 2ème et le $(n+2)$-ième lancer ».

Les lancers sont indépendants donc les événements F_1 et C_n sont indépendants.

De plus la probabilité de C_n est la probabilité de n'obtenir aucun double pile au cours de $n+1$ lancers consécutifs, donc c'est d_{n+1}. D'où : $\mathbb{P}(D_{n+2}\cap F_1)=\mathbb{P}(F_1\cap C_n)=\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(C_n)=\frac{1}{2}d_{n+1}$.

$D_{n+2}\cap P_1$ est l'événement : « on obtient pile au premier lancer et on n'obtient jamais deux piles de suite au cours des $n+2$ premiers lancers ».
Donc $D_{n+2}\cap P_1=P_1\cap F_2\cap K_n$ où K_n est l'événement : « on n'obtient jamais deux piles de suite entre le 3ème et le $(n+2)$-ième lancer ».
Les lancers sont indépendants donc les événements P_1, F_2 et K_n sont indépendants.
De plus la probabilité de K_n est la probabilité de n'obtenir aucun double pile au cours de n lancers consécutifs, donc c'est d_n. D'où : $\mathbb{P}(D_{n+2}\cap P_1)=\mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(K_n)=\frac{1}{4}d_n$.

D'où la relation : $\boxed{d_{n+2}=\frac{1}{2}d_{n+1}+\frac{1}{4}d_n \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul}}$

1.c La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $d_{n+2}-\frac{1}{2}d_{n+1}-\frac{1}{4}d_n=0$

L'équation caractéristique associée est : (e) : $r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}=0$.

Le discriminant est $\Delta=\frac{5}{4}$ et (e) admet deux racines réelles : $r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Il existe donc deux constantes réelles α et β telles que pour tout entier naturel n non nul, on ait :

$$\boxed{d_n=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n}$$

1.d On a $5<9$ donc $\sqrt{5}<3$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}<1$ donc $\frac{1+\sqrt{5}}{4}\in\left]0,1\right[$.

Et $1<\sqrt{5}<3$ donc $-3<-\sqrt{5}<-1$ et $-\frac{1}{2}<\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}\in\left]-1,0\right[$.

Les séries de termes généraux $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$ convergent.

Donc $\boxed{\text{la série de terme général } d_n \text{ converge}}$ comme combinaison linéaire de séries convergentes.

Par suite les séries de termes généraux d_{n+1} et d_{n+2} convergent aussi et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}d_{n+2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}d_{n+1}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}d_n \text{ , donc } \sum_{n=3}^{+\infty}d_n=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}d_n+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}d_n$$

D'où en posant : $S=\sum_{n=1}^{+\infty}d_n$ on obtient : $S-d_1-d_2=\frac{1}{2}(S-d_1)+\frac{1}{4}S$

C'est-à-dire : $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)S=1+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$ donc $\frac{1}{4}S=\frac{5}{4}$ et $\boxed{S=\sum_{n=1}^{+\infty}d_n=5}$

2.a Soit $n\geq 2$. L'événement $(T>n)\cup(T=0)$ est l'événement : « à l'issue du lancer de rang n le jeu n'est toujours pas terminé », donc l'événement : « au cours des n premiers lancers la configuration « pile,pile, face » n'est jamais apparue et la configuration « face, pile, pile » n'est jamais apparue ».
Cet événement est réalisé si et seulement si : ou bien on n'obtient que des piles sur les n premiers lancers, ou bien la configuration « pile, pile » n'apparaît pas au cours de ces n lancers.
En effet si cette configuration « pile, pile » apparaît et qu'il n'y a pas que des piles au cours des n premiers lancers, elle fait partie d'une séquence de piles forcément suivie d'un face ou précédée d'un face, et dans ce cas l'une des configurations « face, pile, pile » ou « pile, pile, face » apparaît au cours des n premiers lancers.
On a donc l'égalité : $(T>n)\cup(T=0)=(P_1\cap P_2\cap ...\cap P_n)\bigcup D_n$
Et par incompatibilité : $\mathbb{P}((T>n)\cup(T=0))=\mathbb{P}(P_1\cap P_2\cap ...\cap P_n)+\mathbb{P}(D_n)$

Puis par indépendance des lancers : $\boxed{\mathbb{P}((T>n)\cup(T=0))=\frac{1}{2^n}+d_n}$

2.b Soit $n\geq 3$. D'après ce qui précède, par incompatibilité : $\mathbb{P}(T>n)+\mathbb{P}(T=0)=\frac{1}{2^n}+d_n$

Et comme $n-1\ \geq\ 2$ on a aussi : $\mathbb{P}(T>n-1)+\mathbb{P}(T=0)=\frac{1}{2^{n-1}}+d_{n-1}$.

Or on a : $\mathbb{P}(T>n-1)=\mathbb{P}(T\geq n)=\mathbb{P}((T=n)\cup(T>n))$

D'où par incompatibilité : $\mathbb{P}(T>n-1)=\mathbb{P}(T=n)+\mathbb{P}(T>n)$

Et : $\mathbb{P}(T=n)=\mathbb{P}(T>n-1)-\mathbb{P}(T>n)=\frac{1}{2^{n-1}}+d_{n-1}-\frac{1}{2^n}-d_n$

Donc : $\boxed{\mathbb{P}(T=n)=\frac{1}{2^n}+d_{n-1}-d_n \text{ pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } 3}$.

2.c Soit L l'événement : « l'un des deux joueurs est déclaré gagnant ». Le jeu ne peut se terminer qu'après au moins 3 lancers, donc $T(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{1,2\}=\{n\in\mathbb{N}, n\geq 3\}\cup\{0\}$.
L est l'événement contraire de $(T=0)$, et on a : $L=\bigcup_{n\geq 3}(T=n)$, donc par incompatibilité 2 à 2 :

$$\mathbb{P}(L)=\sum_{n=3}^{+\infty}\mathbb{P}(V=n)=\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+d_{n-1}-d_n\right).$$

Comme les séries de termes généraux $\frac{1}{2^n}$, d_n et d_{n-1} convergent, on a :

$$\mathbb{P}(L)=\sum_{n=3}^{+\infty}\mathbb{P}(T=n)=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=3}^{+\infty}d_{n-1}-\sum_{n=3}^{+\infty}d_n$$

Donc : $\mathbb{P}(L)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+3}}+\sum_{k=2}^{+\infty}d_k-\sum_{k=3}^{+\infty}d_k=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}+d_2=\frac{1}{8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}=1$.

$\boxed{\text{La probabilité que l'un des deux joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1}}$.

2.d. On a sous réserve de convergence (la série étant à termes positifs cela équivaut à la convergence absolue) :

$\mathrm{E}(T)=\sum_{n=3}^{+\infty} n\mathbb{P}(T=n)=\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2^n}+d_{n-1}-d_n\right)$. Notons encore $r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

On a vu que $r_1 \in]0,1[$ et $r_2 \in]-1,0[$, donc les séries de termes généraux $nr_1^{\,n}$ et $nr_2^{\,n}$ sont convergentes, et la série de terme général nd_n converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

De même, puisque $nr_1^{\,n-1}=\frac{1}{r_1}\times nr_1^{\,n}$ et $nr_2^{\,n-1}=\frac{1}{r_2}\times nr_2^{\,n}$, les séries le termes généraux $nr_1^{\,n-1}$ et $nr_2^{\,n-1}$ sont convergentes, et la série de terme général nd_{n-1} converge aussi comme combinaison linéaire de deux séries convergentes. Enfin la série de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge car $\frac{1}{2}\in]-1,1[$, donc la série $\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2^n}+d_{n-1}-d_n\right)$ converge, et $\boxed{\text{la variable aléatoire } T \text{ admet une espérance}}$.

3.a Si $n=3$ on a évidemment : $G_{1,n}=G_{1,3}=F_1\cap P_2\cap P_3$. Soit $n\geq 4$.

. Supposons $G_{1,n}$ réalisé. Alors $P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ est réalisé.

Si F_{n-3} est aussi réalisé, alors la séquence « face, pile, pile » apparaît au lancer de rang $n-1$ donc avant le lancer de rang n , ce qui contredit le fait que J_1 gagne à l'issue du lancer de rang n , donc on ne peut pas obtenir face au $(n-3)$-ième lancer, donc $P_{n-3}\cap P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ est réalisé.

De proche en proche on obtient que nécessairement $P_1\cap P_2\cap ...\cap P_{n-1}\cap F_n$.

Plus rigoureusement, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il y ait au moins un face lors des $n-3$ premiers lancers. Soit k le plus petit entier de $[\![1,n-3]\!]$ tel que F_k soit réalisé. Alors $F_k\cap P_{k+1}\cap ...\cap P_{n-1}\cap F_n$ est réalisé donc la séquence « face, pile,pile » se produit au lancer de rang $k+2$ or $k+2\leq n-1$ donc cela contredit le fait que J_1 gagne à l'issue du lancer de rang n .

On a montré par l'absurde qu'il n'y a aucun face entre le premier et le $(n-3)$-ième lancer, donc $P_1\cap ...\cap P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ est réalisé. D'où l'inclusion : $G_{1,n}\subset P_1\cap ...\cap P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$.

. Inversement si l'événement $P_1\cap ...\cap P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ est réalisé alors la séquence « pile, pile, face » apparaît pour la première fois au rang n , sans que la séquence « face, pile, pile » ne soit apparue auparavant, d'où l'inclusion : $P_1\cap ...\cap P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n\subset G_{1,n}$.

. Finalement on a pour tout $n\geq 4$ et aussi pour $n=3$ l'égalité : $G_{1,n}=P_1\cap ...\cap P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$.

D'où par indépendance des lancers : $\mathbb{P}(G_{1,n})=\mathbb{P}(P_1)...\mathbb{P}(P_{n-2})\mathbb{P}(P_{n-1})\mathbb{P}(F_n)=\frac{1}{2^n}$.

On a donc : $\boxed{g_n=\frac{1}{2^n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } 3}$

3.b L'événement M_1 : « le joueur J_1 est déclaré gagnant » est la réunion des événements $G_{1,n}$ pour n supérieur ou égal à 3, et ces événements sont deux à deux incompatibles, donc on a :

$$\mathbb{P}(M_1)=\sum_{n=3}^{+\infty}\mathbb{P}(G_{1,n})=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

$\boxed{\text{La probabilité pour que le joueur } J_1 \text{ soit déclaré gagnant est égale à } \frac{1}{4}}$.

4.a Notons M_2 l'événement : « le joueur J_2 est déclaré gagnant ».

D'après **2.c** on a : $\mathbb{P}(M_1\cup M_2)=\mathbb{P}(M_1)+\mathbb{P}(M_2)=1$. Or $\mathbb{P}(M_1)=\frac{1}{4}$, donc $\mathbb{P}(M_2)=\frac{3}{4}$

$\boxed{\text{La probabilité pour que le joueur } J_2 \text{ soit déclaré gagnant est égale à } \frac{3}{4}}$

4.b On en déduit que $\boxed{\text{le joueur } J_2 \text{ a bien un net avantage sur le joueur } J_1}$

4.c Si la configuration gagnante du joueur J_1 avait été *Pile,Pile,Face* et celle du joueur J_2 *Face,Face,Pile*, puisque la pièce est equilibrée par symétrie des rôles les deux joueurs auraient eu la même probabilité de gain.

5.a Soit $x\in[0,1]$. On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\leq d_nx^n\leq d_n$ et $0\leq t_nx^n\leq t_n$.

Or les séries de termes généraux d_n et t_n convergent.

En effet on a vu que $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n=5$, et on a d'autre part $\sum_{n=1}^{+\infty} t_n=\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n)=\sum_{n=3}^{+\infty} P(T=n)=1$.

Donc par le théorème de comparaison les séries de termes généraux d_nx^n et t_nx^n convergent.

Ainsi, $\boxed{\text{les fonctions } d \text{ et } t \text{ sont bien définies sur } [0,1]}$.

5.b Soit $x\in[0,1]$. Les séries de termes généraux $d_{n-1}x^n$ et d_nx^n étant convergentes, on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}(d_{n-1}-d_n)x^n=\sum_{n=3}^{+\infty}d_{n-1}x^n-\sum_{n=3}^{+\infty}d_nx^n=\sum_{n=2}^{+\infty}d_nx^{n+1}-\sum_{n=3}^{+\infty}d_nx^n$$

D'où : $\sum_{n=3}^{+\infty}(d_{n-1}-d_n)x^n=x\sum_{n=2}^{+\infty}d_nx^n-\sum_{n=3}^{+\infty}d_nx^n=x\left(d(x)-d_1x\right)-\left(d(x)-d_1x-d_2x^2\right)$

Ainsi : $\sum_{n=3}^{+\infty}(d_{n-1}-d_n)x^n=x\left(d(x)-x\right)-\left(d(x)-x-\frac{3}{4}x^2\right)=(x-1)d(x)-x^2+x+\frac{3}{4}x^2$

Et finalement : $\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty}(d_{n-1}-d_n)x^n=(x-1)d(x)+x-\frac{1}{4}x^2}$.

5.c Puisque $P(T=1)=P(T=2)=0$, on obtient pour tout $x\in[0,1]$:

$$t(x)=\sum_{n=3}^{+\infty}P(T=n)x^n=\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+d_{n-1}-d_n\right)x^n=\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n+(d_{n-1}-d_n)x^n\right)$$

Comme $\frac{x}{2}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, la série de terme général $\left(\frac{x}{2}\right)^n$ converge, et de plus : $\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1-\frac{x}{2}}=\frac{x^3}{4(2-x)}$

Ainsi $t(x)$ est la somme de deux séries convergentes, et $t(x)=\frac{x^3}{4(2-x)}+(x-1)d(x)+x-\frac{1}{4}x^2$

D'où $t(x)=\frac{x^2}{4}\left(\frac{x}{2-x}-1\right)+(x-1)d(x)+x=\frac{x^2}{4}\left(\frac{2x-2}{2-x}\right)+(x-1)d(x)+x$

Et finalement on obtient pour tout $x\in[0,1]$ l'égalité : $\boxed{t(x)=\frac{x^2(x-1)}{2(2-x)}+(x-1)d(x)+x}$.

5.e Pour tout $x\in[0,1[$, $\frac{t(x)-t(1)}{x-1}=\frac{t(x)-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2(x-1)}{2(2-x)}+(x-1)d(x)+x-1\right)$

Donc $\boxed{\frac{t(x)-t(1)}{x-1}=\frac{x^2}{2(2-x)}+d(x)+1}$.

5.f (i) Soient $x,y\in[0,1]$ tels que $x\le y$. On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\le d_nx^n\le d_ny^n$ et puisque ces deux séries convergent : $\sum_{n=1}^{+\infty}d_nx^n\le\sum_{n=1}^{+\infty}d_ny^n$, donc $d(x)\le d(y)$.

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } d \text{ est croissante sur } [0,1]}$.

Soient $N\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$, on a : $d(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}d_nx^n=\sum_{n=1}^{N}d_nx^n+\sum_{n=N+1}^{+\infty}d_nx^n$

Et $\sum_{n=N+1}^{+\infty}d_nx^n\ge 0$, donc $\sum_{k=1}^{N}d_kx^k\le d(x)$. De plus, la fonction d est croissante sur $[0,1]$ donc $d(x)\le d(1)$, d'où la double inégalité : $\boxed{\sum_{k=1}^{N}d_kx^k\le d(x)\le d(1)}$.

(ii) La fonction d est croissante sur $[0,1]$ et majorée par $d(1)$, donc par le théorème de la limite monotone elle admet une limite finie L à gauche en 1, qui vérifie $L\le d(1)$.

On déduit de **(i)**, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, $\sum_{k=1}^{N}d_kx^k\le d(x)\le L$

En faisant tendre x vers 1 on obtient : $\forall N\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{N}d_k\le L$

Puis en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $d(1)\le L$, d'où finalement : $\boxed{L=d(1)}$.

5.g On a montré en **1.d** que $d(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}d_n=5$ et en **5.g** que d est continue en 1.

En utilisant le résultat établi en **5.e** on a alors : $\lim_{x\to1}\frac{t(x)-t(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2}{2(2-x)}+d(x)+1\right)=\frac{13}{2}$.

Ainsi, $\boxed{t \text{ est dérivable au point 1 et } t'(1)=\frac{13}{2}}$. D'après le résultat admis dans la partie **I)** ,on en déduit que la variable aléatoire T admet une espérance donnée par $\boxed{E(T)=\frac{13}{2}}$.

PARTIE III : UNE AUTRE UTILISATION DES FONCTIONS GENERATRICES

1. On a $X_1(\Omega)=\{0,2\}$, $P(X_1=0)=\frac{1}{3}$ et $P(X_1=2)=\frac{2}{3}$.

$E(X_1)=0\times P(X_1=0)+2\times P(X_1=2)$ donc $E(X_1)=\frac{4}{3}$.

2. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n=2Y_{n-1}$ où Y_{n-1} est le nombre (entier) de bactéries présentes à l'issue de la (n-1)-ième étape qui se divise en 2 à l'étape n, donc X_n ne prend que des valeurs paires. De plus on obtient par récurrence $X_n(\Omega)=[\![0,2^n]\!]$ (le cas où $(X_n=2^n)$ est réalisé correspondant ou cas où à chacune de n premières étapes chaque bactérie se divise en 2).

3. a. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $G_1(x)=\sum_{k=0}^{2}P(X_1=k)x^k=P(X_1=0)+P(X_1=2)x^2$

D'où : $G_1(x)=\sum_{k=0}^{2}P(X_1=k)x^k=P(X_1=0)+P(X_1=2)x^2$

Donc : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ G_1(x)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^2}$.

En dérivant la relation admise, les fonctions étant polynomiales donc dérivables sur $\mathbb{R}$, on obtient : $\forall x\in\mathbb{R}, G_{n+1}'(x)=G_n'(x)\times G_1'(G_n(x))$.

Or : $\forall x\in\mathbb{R}$, $G_1'(x)=\frac{4}{3}x$, d'où : $\forall x\in\mathbb{R}, G_{n+1}'(x)=G_n'(x)\times\frac{2}{3}G_n(x)$.

En particulier : $G_{n+1}'(1)=G_n'(1)\times\frac{2}{3}G_n(1)$. Or $G_n(1)=1$, $G_n'(1)=E(X_n)$ et $G_{n+1}'(1)=E(X_{n+1})$

D'où : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad E(X_{n+1})=\frac{4}{3}E(X_n)}$.

b. La suite $(E(X_n))_{n\ge1}$ est géométrique, d'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $E(X_n)=\left(\frac{4}{3}\right)^n\times E(X_0)$.

La variable X_0 est certaine, et $X_0=1$, donc $E(X_0)=1$.

On en déduit : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad E(X_n)=\left(\frac{4}{3}\right)^n}$.

4. **a.** La relation : $\forall x\in\mathbb{R}, G_{n+1}^{'}(x)=G_n^{'}(x)\times G_1{}'(G_n(x))$ donne immédiatement :

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}, G_{n+1}(x)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(G_n(x))^2}$.

b. On obtient en particulier : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ G_{n+1}(0)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(G_n(0))^2$

Et donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}u_n^{\ 2}}$

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $0\le u_n\le\frac{1}{2}$.

On a $u_0=P(X_0=0)=0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors $0\le u_n^{\ 2}\le\frac{1}{4}$ et $0\le\frac{2}{3}u_n^{\ 2}\le\frac{1}{6}$

Donc $0\le\frac{1}{3}+\frac{2}{3}u_n^{\ 2}\le\frac{1}{2}$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\le u_n\le\frac{1}{2}}$.

d. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, s'il n'y a aucune bactérie présente à l'étape n, il n'y en a aucune également à l'étape n+1, donc $(X_n=0)\subset(X_{n+1}=0)$ et $P(X_n=0)\le P(X_{n+1}=0)$, soit $u_n\le u_{n+1}$.
Remarque : on peut aussi montrer ce résultat par récurrence en utilisant la croissance de la fonction $x\mapsto\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^2$ sur $[0,1]$ pour prouver l'hérédité.

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

La suite (u_n) est majorée par ½ , et d'après le théorème de la limite monotone <u>elle converge</u>.

Soit l sa limite. En passant à la limite dans la relation : $u_{n+1}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}u_n^{\ 2}$ on obtient : $l=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}l^2$

D'où : $\frac{2}{3}l^2-l+\frac{1}{3}=0$, et puisque 1 est racine apparente : $\frac{2}{3}\left(l^2-\frac{3}{2}l+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}(l-1)\left(l-\frac{1}{2}\right)=0$

Or $l\le\frac{1}{2}$, donc $l\ne1$ et $\boxed{l=\frac{1}{2}}$.

5. **a.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $(X_n=0)=(X_{n-1}=0)\cup E_n$
En effet il n'y a aucune bactérie à l'étape n lorsque soit il n'y en a aucune à l'étape n-1 soit la population disparaît exactement à l'étape n.
On obtient par incompatibilité : $P(X_n=0)=P(X_{n-1}=0)+P(E_n)$

D'où : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, P(E_n)=u_n-u_{n-1}}$.

6. La population finit par s'éteindre si et seulement si il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que la population s'éteigne précisément à l'étape n, on a donc bien : $R=\bigcup_{n=1}^{+\infty}E_n$.

Comme les événements E_n sont deux à deux incompatibles, on obtient :

$P(R)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(E_n)=\sum_{k=1}^{+\infty}(u_n-u_{n-1})$.

Or pour tout $N\ge1$ on a par télescopage : $\sum_{k=1}^{N}(u_n-u_{n-1})=u_N-u_0=u_N$

D'où $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}(u_n-u_{n-1})=\lim_{N\to+\infty}u_N=\frac{1}{2}$, et ainsi : $\boxed{P(R)=\frac{1}{2}}$.