2BCPST1	DS2 modélisation (durée 3h)	samedi 8 novembre 2025

PARTIE I : FONCTION GENERATRICE D'UNE VARIABLE DISCRETE

A) Préliminaires : deux fonctions en Python en rapport avec les polynômes.

Une fonction polynomiale f qui à tout réel x associe le réel $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sera représenté par la liste de ses coefficients $[a_0, a_1, ..., a_n]$.
Il n'y a pas unicité de cette représentation, car par exemple les listes $[1,-2,0,3]$ et $[1,-2,0,3,0,0]$ représentent la même fonction polynomiale définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1-2x+3x^3$.

1. Définir en Python une fonction **valeur** qui prend en entrée une fonction polynomiale P codée comme ci-dessus sous forme d'une liste de réels, un réel x , et renvoie la valeur $\mathrm{P}(x)$ prise par la fonction polynomiale P en x .
2. Définir en Python une fonction **deriv** qui prend en entrée une fonction polynomiale P codée comme ci-dessus et renvoie la fonction polynomiale dérivée P' également codée comme ci-dessus.

Dans la suite de cette partie on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

B) Cas d'une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs entières

On suppose dans cette question que $X(\Omega) \subset \{0,1,...,n\}$, où $n \in \mathbb{N}$. La fonction génératrice de X est la fonction polynomiale f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)x^k$.

1. Préciser la valeur de $f(1)$.
2. Démontrer la relation $E(X) = f'(1)$.
3. Exprimer de même $V(X)$ en fonction de $f'(1)$ et $f''(1)$.
4. Dans le cas où X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $0<p<1$, déterminer $f(x)$ pour tout réel x , puis retrouver les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$ en utilisant les questions **B) 2.** et **3.**

5. L'instruction **print((deriv ([0, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2 ,0.2] ,1))** renvoie la valeur 3. Commenter.

C) Cas d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

On suppose dans cette question que l'on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = P(X=n)$.

1. Justifier que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.

3. On désigne par f la fonction définie sur $\left[0,1\right]$ par : $\forall x \in \left[0,1\right]$, $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

On admettra dans toute la suite du problème que, lorsque la fonction f est dérivable en 1, la variable aléatoire X admet une espérance donnée par la relation $E\left(X\right)=f'(1)$.

3. On se place ici dans le cas particulier où X suit une loi géométrique de paramètre p avec $0<p<1$.

a. Rappeler sans calculs les valeurs de $E\left(X\right)$ et de $V\left(X\right)$.

b. Déterminer $f\left(x\right)$ pour tout $x \in \left[0,1\right]$.

c. En utilisant le résultat admis ci-dessus retrouver la valeur de $E\left(X\right)$.

PARTIE II : LE PARADOXE DE WALTER PENNEY

Dans toute cette partie on considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle à chaque lancer les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables.
On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_n l'événement « pile apparaît au lancer de rang n » et par F_n l'événement « face apparaît au lancer de rang n ».
Deux joueurs J_1 et J_2 décident de jouer selon la règle suivante :
J_1 gagne si la configuration « pile, pile, face » apparaît avant que soit apparue la configuration « face, pile, pile » et le jeu s'arrête.
J_2 gagne si la configuration « face, pile, pile » apparaît avant que soit apparue la configuration « pile, pile, face » et le jeu s'arrête.

A) Etude théorique

On se propose de démontrer que le joueur J_2 possède un net avantage sur le joueur J_1.

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note D_n l'événement « lors des n premiers lancers il n'y a jamais eu deux piles de suite» et d_n sa probabilité. On a en particulier $d_1=1$.

1.a Préciser la valeurs de d_2.

1.b En considérant les résultats du premier lancer, justifier pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante : $d_{n+2}=\frac{1}{2}d_{n+1}+\frac{1}{4}d_n$.

1.c Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β, que l'on ne cherchera pas à calculer, telles que pour tout entier naturel n non nul, on ait : $d_n=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

1.d En déduire que la série de terme général d_n converge, et , en utilisant l'égalité du **1.b** , prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

2. On considère alors T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que le jeu se termine (c'est-à-dire le nombre de lancers nécessaires pour que J_1 ou J_2 gagne) et égale à 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

2.a Justifier, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , l'égalité :

$$\mathbb{P}\big((T>n)\cup(T=0)\big)=\frac{1}{2^n}+d_n$$

2.b En déduire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 , l'égalité :

$$\mathbb{P}(T=n)=\frac{1}{2^n}+d_{n-1}-d_n$$

2.c Montrer alors que la probabilité que l'un des deux joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

2.d Justifier que la variable aléatoire T admet une espérance (on ne cherchera pas à la calculer).

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on note $G_{1,n}$ l'événement « le joueur J_1 gagne à l'issue du lancer de rang n » et g_n sa probabilité.

3.a Etablir , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, l'égalité : $g_n=\dfrac{1}{2^n}$.

3.b En déduire la probabilité pour que le joueur J_1 soit déclaré gagnant.

4. **4.a** Calculer alors la probabilité pour que le joueur J_2 soit déclaré gagnant.

4.b Conclure.

4.c Si la configuration gagnante du joueur J_1 avait été *Pile,Pile,Face* et celle du joueur J_2 *Face,Face,Pile* quelle aurait été la conclusion ?

5. Pour tout entier naturel n non nul, on note $t_n=P(T=n)$.

Soient d et t les fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x\in[0,1],\ d(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \ \text{ et } \ t(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} t_n x^n .$$

5.a Justifier que ces fonctions sont bien définies sur $[0,1]$.

5.b Démontrer pour tout $x\in[0,1]$ l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}(d_{n-1}-d_n)x^n=(x-1)d(x)+x-\frac{1}{4}x^2$.

5.c En déduire pour tout $x\in[0,1]$ l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} t_n x^n=\frac{x^3}{4(2-x)}+(x-1)d(x)+x-\frac{1}{4}x^2$

5.d Montrer enfin pour tout $x\in[0,1]$ l'égalité : $t(x)=\dfrac{x^2(x-1)}{2(2-x)}+(x-1)d(x)+x$.

5.e Exprimer, pour tout $x\in[0,1[$, le quotient $\dfrac{t(x)-t(1)}{x-1}$ en fonction de $d(x)$.

5.f (i) Justifier la croissance de la fonction d et, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, établir la double inégalité suivante : $\sum_{k=1}^{N} d_k x^k \leq d(x) \leq d(1)$.

(ii) Justifier que d admet une limite finie L à gauche en 1, puis montrer que : $L = d(1)$.

5.g Montrer que t est dérivable au point 1, et à l'aide du résultat admis dans la partie **I)** , en déduire que la variable aléatoire T admet une espérance dont on précisera la valeur.

B) Simulation informatique

1. Définir en Python une fonction **lancer( )** sans paramètre en entrée qui simule le lancer d'une pièce et renvoie 1 si la pièce tombe sur pile et 0 si elle tombe sur face.

2. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule une partie et renvoie le numéro du joueur qui gagne la partie.

```
def jeu ( ) :
    a,b,c = lancer( ), lancer( ), lancer( )
    while [a,b,c] != …. and [a,b,c] != …. :
        a,b,c = ….
    if …
        return …
    return …
```

3. A l'aide de cette fonction, écrire un script en Python qui affiche des valeurs approchées des probabilités de gain respectifs des deux joueurs.
4. Modifier la fonction **jeu( )** précédente pour créer une fonction **T( )** qui renvoie une valeur simulée de la variable aléatoire T .
5. Ecrire ensuite une fonction **moyT(** *nbsim* **)** qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de T obtenue à partir de *nbsim* simulations de la variable aléatoire T.

PARTIE III : UNE AUTRE UTILISATION DES FONCTIONS GENERATRICES

On s'intéresse à l'évolution d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème répondant au modèle suivant : l'évolution est supposée réalisée par étapes successives, et à chaque étape, chaque bactérie peut indépendamment des autres :

- Soit donner lieu à une fission binaire, en se divisant en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité de 2/3
- Soit mourir et se désintégrer avec une probabilité de 1/3.

On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes à l'issue de la n-ième étape. Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie, et on note $X_0 = 1$.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1 .

2. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que X_n ne prend que des valeurs paires, et expliciter $X_n(\Omega)$.

   b. Compléter la fonction **X(n)** définie ci-dessous pour qu'elle renvoie une valeur simulée de la variable aléatoire X_n.

```
def X(n):
    pop = …
    for k in range( … ):
        s = 0
        for i in range( … ):
            if rd.random( ) < … :
                s += …
        pop = …
    return …
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n la fonction génératrice de la variable aléatoire X_n, définie comme dans la partie **I B)** .
   On admettra la relation : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ G_{n+1} = G_1 \circ G_n}$.

   a. Expliciter la fonction G_1, puis en utilisant le résultat admis ci-dessus et les résultats de la partie **I B)** établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$.

   b. Calculer alors l'espérance de X_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = P(X_n = 0)$, et soit R l'événement : « la population de bactéries finit par s'éteindre ».

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, G_{n+1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(G_n(x)\right)^2$.

   b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_n^{\ 2}$.

   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

   d. Montrer que la suite (u_n) est croissante, et qu'elle converge vers un réel l que l'on précisera.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit E_n l'événement : « la population disparaît exactement à l'issue de l'étape n ».

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(E_n) = u_n - u_{n-1}$.

   b. En remarquant que $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, déterminer la probabilité que la population finisse par s'éteindre.

6. Ecrire en Python une fonction **pr(n)** qui prend en entrée un entier naturel non nul n et renvoie une valeur approchée de u_n obtenue à partir de 10000 simulations de la variable aléatoire X_n .