Correction DM n°4

I Etude du nombre de greffes nécessaires pour que toutes les greffes prennent.

1. G est le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le premier succés (prise d'une greffe) lors d'une suite d'épreuve de Bernoulli indépendantes de probabilité de succés p.
Donc G suit la loi géométrique de paramètre p

$$\boxed{G \hookrightarrow \mathcal{G}(p); \quad G(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(G=n) = pq^{n-1}}$$

D'après le cours :

$$\boxed{E(G) = \frac{1}{p}, \quad V(G) = \frac{q}{p^2}}$$

2. a) Pour $1 \leqslant k \leqslant R$, d'après le I.1, X_k suit la loi $\mathcal{G}(p)$.

b) $S_R = \sum\limits_{k=1}^{R} X_k$.

c) Par linéarité, $E(S_R) = \sum\limits_{k=1}^{R} E(X_k) = \dfrac{R}{p}$.
Par indépendance des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_R$,
$V(S_R) = \sum\limits_{k=1}^{R} V(X_k) = \dfrac{Rq}{p^2}$.

$$\boxed{E(S_R) = \frac{R}{p}, \quad V(S_R) = \frac{Rq}{p^2}}$$

3. On se propose ici de trouver la loi de S_R.

a) L'ensemble des valeurs prises par S_R est $\mathbb{N} \backslash \{0, ..., R-1\}$.
Donc $\boxed{S_R(\Omega) = \llbracket r, +\infty\llbracket.}$
Montrons que par récurrence que :
$\forall R \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(R)$: « $\forall k \in S_R(\Omega), P(S_R = k) = \binom{k-1}{R-1} p^R (1-p)^{k-R}$ » est vraie.

- Initialisation $R = 1$: X_1 suit une loi géométrique de paramètre p.
$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_1 = k) = pq^{k-1} = \binom{k-1}{0} p^0 (1-p)^{k-0}$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $R \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(R)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(R+1)$ est vraie.
$S_{R+1} = \sum\limits_{k=1}^{R} X_k + X_{R+1} = S_R + X_{R+1}$.

On applique la méthode du calcul de la loi d'une somme de deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$:

Soit $k \in S_{R+1}(\Omega) = \llbracket r+1, +\infty\llbracket$.
S_R et X_{R+1} sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.

$$\begin{aligned} P(S_{R+1} = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(S_R = i, X_{R+1} = k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(S_R = i) P(X_{R+1} = k-i) \end{aligned}$$

$$P(S_R = i, X_{R+1} = k-i) \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} i \geqslant R \\ k-i \geqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} i \geqslant R \\ k-1 \geqslant i \end{cases}$$

Comme $k \geqslant R+1$, on a donc en utilisant $\mathcal{P}(R)$:

$$\begin{aligned} P(S_{R+1} = k) &= \sum_{i=R}^{k-1} \binom{i-1}{R-1} p^R (1-p)^{i-R} p (1-p)^{k-i-1} \\ &= \sum_{i=R}^{k-1} \binom{i-1}{R-1} p^{R+1} (1-p)^{k-(R+1)} \\ &= p^{R+1} (1-p)^{k-(R+1)} \sum_{i=R}^{k-1} \binom{i-1}{R-1} \end{aligned}$$

D'après la formule du triangle de Pascal , on a :
$\sum\limits_{i=R}^{k-1} \binom{i-1}{R-1} = \sum\limits_{i=R}^{k-1} \binom{i}{R} - \binom{i-1}{R} = \binom{k-1}{R} - \underbrace{\binom{R}{R-1}}_{=0}$ (somme télescopique).

Donc $\sum\limits_{i=R}^{k-1} \binom{i-1}{R-1} = \binom{k-1}{R}$.

(c'est la formule du triangle de pascal généralisée, déjà démontrée dans le TD n°5, exercice n°6 question 5).
D'où $P(S_{R+1} = k) = \binom{k-1}{R} p^{R+1}(1-p)^{k-(R+1)}$ pour tout $k \in S_{R+1}(\Omega)$ et $\mathcal{P}(R+1)$ est vraie.

$\boxed{\text{Ainsi } \forall R \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(R) \text{ est vraie.}}$

b) S_R est une variable aléatoire donc $\sum\limits_{k=R}^{+\infty} P(S_R = k) = 1$

Donc $\boxed{\sum\limits_{k=R}^{+\infty} \binom{k-1}{R-1} p^R(1-p)^{k-R} = 1.}$

c) Ici, seuls les calculs sont demandés puisque les existences ont été démontrées dans la question 2c).

$$\begin{aligned}
E(S_R) &= \sum_{k=R}^{+\infty} k \binom{k-1}{R-1} p^R(1-p)^{k-R} \\
&= R \sum_{k=R}^{+\infty} \binom{k}{R} p^R(1-p)^{k-R} \\
&= R \sum_{i=R+1}^{+\infty} \binom{i-1}{R} p^R(1-p)^{i-(R+1)} \quad (k = i-1) \\
&= \frac{R}{p} \sum_{i=R+1}^{+\infty} \binom{i-1}{R} p^{R+1}(1-p)^{i-(R+1)} \\
&= \frac{R}{p}
\end{aligned}$$

car $\sum\limits_{i=R+1}^{+\infty} \binom{i-1}{R} p^{R+1}(1-p)^{i-(R+1)} = 1$ en écrivant l'égalité de la question précédente avec $R+1$.
Donc $E(S_R) = \dfrac{R}{p}$.

On remarque que $E(S_R^2) = E(S_R(S_R+1)) - E(S_R)$. Calculons $E(S_R(S_R+1))$.

$$\begin{aligned}
E(S_R(S_R+1)) &= \sum_{k=R}^{+\infty} k(k+1) \binom{k-1}{R-1} p^R(1-p)^{k-R} \\
&= R(R+1) \sum_{k=R}^{+\infty} \binom{k+1}{R+1} p^R(1-p)^{k-R} \\
&= R(R+1) \sum_{i=R+2}^{+\infty} \binom{i-1}{R+1} p^R(1-p)^{i-(R+2)} \quad (k = i-2) \\
&= \frac{R(R+1)}{p^2} \sum_{i=R+2}^{+\infty} \binom{i-1}{R+1} p^{R+2}(1-p)^{i-(R+2)} \\
&= \frac{R(R+1)}{p^2}
\end{aligned}$$

donc

$$E(S_R^2) = \frac{R(R+1)}{p^2} - \frac{R}{p}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
V(S_R) &= E(S_R^2) - E(S_R)^2 \\
&= \frac{R(R+1)}{p^2} - \frac{R}{p} - \left(\frac{R}{p}\right)^2 \\
&= \frac{R}{p^2}(R+1-R) - \frac{R}{p} - \left(\frac{R}{p}\right)^2 \\
&= \frac{R(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{V(S_R) = \dfrac{Rq}{p^2}}$
On retrouve bien les résultats de la question I.2.c).

d) La suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance $\dfrac{1}{p}$ et de variance non nulle $\dfrac{q}{p^2}$.

D'après la loi faible des grands nombres, on a avec $S_R = \sum_{k=1}^{R} X_k$:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \ \lim_{R \to +\infty} P\left(\left|\frac{S_R}{R} - \frac{1}{p}\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.}$$

II Etude du nombre de semaines nécessaires à la prise des greffes des R rosiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $Y = \max(X_1, \cdots, X_R)$. On applique la méthode du cours :

$P(Y \leqslant n) = P(X_1 \leqslant n, .., X_R \leqslant n) = \prod_{k=1}^{R} P(X_k \leqslant n)$ par indépendance.

$P(X_k \leqslant n) = \sum_{i=1}^{n} P(X_k = i) = \sum_{i=1}^{n} pq^{i-1} = p\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad P(Y \leqslant n) = (1-q^n)^R}$$

b) La formule ci-dessus est encore valable pour $n = 0$, car $P(Y \leqslant 0) = 0$, car Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall n \geqslant 1, \quad P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1)$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad P(Y = n) = (1-q^n)^R - (1-q^{n-1})^R}$$

2. On cherche à déterminer l'espérance de Y.

On admet le lemme suivant (démontré dans le DS n°2) :

> Soit Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
> Alors Z admet une espérance si et seulement la série $\sum P(Z > n)$ converge.
>
> Dans ce cas, $E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n)$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - (1-q^n)^R$.

a) $(1+u)^R - 1 \underset{u \to 0}{\sim} Ru$ et $\lim_{n \to \infty} -q^n = 0$ car $q \in]0,1[$. d'où $(1-q^n)^R - 1 \sim -Rq^n$ d'où

$$\boxed{v_n \sim Rq^n}$$

b) Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On remarque que $P(Y > n) = 1 - P(Y \leqslant n) = v_n$.
Montrons que $\sum v_n$.

- $v_n \sim Rq^n$
- $\sum q^n$ est une série géométrique convergente car $q \in]0,1[$. Donc $\sum Rq^n$ converge aussi.
- Les séries $\sum v_n$ et $\sum Rq^n$ sont à termes positifs.

Donc d'après le théorème de convergence par comparaison, $\sum v_n$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{d'après le lemme admis, } E(Y) \text{ existe et } E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.}$

c) Pour $R = 2$,

$1 - (1-q^n)^2 = 2q^n - q^{2n}$

$E(Y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n - \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n$ car les deux séries convergent.

$E(Y) = 2\dfrac{1}{1-q} - \dfrac{1}{1-q^2} = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p(1+q)} = \dfrac{1+2q}{1-q^2}$

$$\boxed{E(Y) = \frac{1+2q}{1-q^2}}$$

III Etude de l'évolution du processus

1. Z_n est le nombre de de rosiers pour lesquels la greffe a pris pendant la $(n+1)$ ième semaine.

2. Y_1 est le nombre de greffes prises lors de la première semaine.
On répète R fois la même expérience de Bernoulli (la greffe a prise ou pas) de manière indépendante dont la probabilité de succés (la greffe a prise) vaut p.
Y_1 correspond alors au nombre de succés. Donc,

$$\boxed{Y_1 \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(R,p),\ E(Y_1) = Rp, \quad V(Y_1) = Rpq}$$

3. a) Y_n est à valeurs dans $\{0,\dots,R\}$ et $Y_{n+1} = Y_n + Z_n$
Soit $k \in \mathbb{N}$
$(Y_n = m)_{m\in\{0,\dots,R\}}$ forme un système complet d'événements. Donc en utilisant la formule de probas totales, on a :

$$P(Y_{n+1} = k) = \sum_{m=0}^{R} P(Z_n = k-m/Y_n = m)\, P(Y_n = m)$$

Si $k - m < 0$, $P(Z_n = k-m/Y_n = m) = 0$ car Z_n est à valeurs positives.

$$\boxed{\text{Pour } k \in \{0,..,R\},\ P(Y_{n+1} = k) = \sum_{m=0}^{k} P(Z_n = k-m/Y_n = m)\, P(Y_n = m)}$$

b) Si $Y_n = m$, a l'issue de la nième semaine, il reste $R - m$ rosiers non greffés. On retente une greffe sur ces rosiers.
On répète $R - m$ fois la même expérience de Bernoulli (la greffe a prise ou pas) de manière indépendante dont la probabilité de succés (la greffe a prise) vaut p.

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } Z_n \text{ sachant } Y_n = m \text{ est la loi binomiale } \mathcal{B}(R-m,p).}$$

4. a) Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que $k \leqslant R$. En utilisant le résultat de la question précédente et la loi de Y_1, il vient que :

$$\begin{aligned} P(Y_2 = k) &= \sum_{m=0}^{k} P(Z_1 = k-m/Y_1 = m)\, P(Y_1 = m) \\ &= \sum_{m=0}^{k} \binom{R-m}{k-m} p^{k-m} q^{R-k} \binom{R}{m} p^m q^{R-m} \end{aligned}$$

Donc
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que } k \leqslant R, \\ P(Y_2 = k) = \displaystyle\sum_{m=0}^{k} \binom{R-m}{k-m} p^{k-m} q^{R-k} \binom{R}{m} p^m q^{R-m}.\end{array}}$$

b) Soit $(k,m) \in \mathbb{N}^2$, tels que $0 \leqslant m \leqslant k \leqslant R$,

$$\begin{aligned} \binom{R-m}{k-m}\binom{R}{m} &= \frac{(R-m)!}{(k-m)!\,(R-k)!} \frac{R!}{(R-m)!m!} \\ &= \frac{R!}{k!\,(R-k)!} \frac{k!}{(k-m)!m!} \\ &= \binom{R}{k}\binom{k}{m} \end{aligned}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N},\ k \leqslant R$, en utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(Y_2 = k) &= \sum_{m=0}^{k} \binom{R-m}{k-m} p^{k-m} q^{R-k} \binom{R}{m} p^m q^{R-k+k-m} \\ &= \binom{R}{k} p^k (q^2)^{R-k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} q^{k-m} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ k \leqslant R,\ P(Y_2 = k) = \binom{R}{k} p^k (q^2)^{R-k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} q^{k-m}.}$

d) Par la formule du binôme, $P(Y_2 = k) = \binom{R}{k} p^k q^{2(R-k)} (1+q)^k$.

Donc $\boxed{\forall k \in [\![0,R]\!],\ P(Y_2 = k) = \binom{R}{k} (p(1+q))^k (q^2)^{R-k}.}$

Comme $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$, alors Y_2 suit une loi binomiale $\mathcal{B}(R, 1-q^2)$.

5. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$: « Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(R, 1-q^n)$ » est vraie.

- Initialisation pour $n = 1$: on a montré que Y_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(R, 1-q)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

  On applique la formule ($\star$), on utilise la loi de Z_n sachant que $(Y_n = m)$ et la loi de Y_n , donnée par $\mathcal{P}(n)$:

  $\forall k \in \{0, .., R\}$,

  $P(Y_{n+1} = k) = \sum\limits_{m=0}^{k} P(Z_n = k - m / Y_n = m) P(Y_n = m)$

  $P(Y_{n+1} = k) = \sum\limits_{m=0}^{k} \binom{R-m}{k-m} p^{k-m} q^{R-k} \binom{R}{m} (1 - q^n)^m (q^n)^{R-m}$

  $P(Y_{n+1} = k) = \binom{R}{k} q^{R-k} (q^n)^{R-k} \sum\limits_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (1 - q^n)^m p^{k-m} (q^n)^{k-m}$

  $P(Y_{n+1} = k) = \binom{R}{k} q^{R-k} (q^n)^{R-k} \sum\limits_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (1 - q^n)^m (pq^n)^{k-m}$

  $P(Y_{n+1} = k) = \binom{R}{k} (q^{n+1})^{R-k} (1 - q^n + pq^n)^k$ (binôme)

  Or $q^{n+1} + 1 - q^n + pq^n = 1 - q^n + q^n (q + p) = 1$

  On a donc montré que Y_{n+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(R, 1 - q^{n+1})$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N}^* \ Y_n \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(R, 1 - q^n)}$

6. Soit $k \in \{0, .., R\}$, $P(Y_n = k) = \binom{R}{k} (1 - q^n)^k q^{n(R-k)}$

Comme $q \in]0, 1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

d'où si $k \in \{0, .., R - 1\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n = k) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n = R) = 1$.

Interprétation : Quand le nombre de semaines augmente, on est presque sur que toutes les greffes prendront.