DM N°4

Remarque : Rajouter de l'info et attention dans la loi de SR on a besoin de la formule de Pascal généralisée à refaire démontrer sinon l'admettre
A rendre le lundi 24 novembre. Une copie par personne. Vous devez rédiger obligatoirement la partie I et au choix, la partie II ou III. Pour information la partie II est plus facile (mais classique) que la partie III. Pour les 5/2 , je vous conseille de faire la partie III sauf si vous vous sentez en difficulté car normalement, vous devez savoir faire la partie II.

L'objet de l'exercice est l'étude et la modélisation d'un procédé ultra rapide de greffes de rosiers. Lorsqu'une greffe est opérée, on sait au bout d'une semaine si elle a pris ou non. On suppose que la probabilité qu'une greffe donnée prenne est constante et égale à $p \in]0,1[$.
On veut greffer R rosiers où R est un entier supérieur ou égal à 1. Pour chacun d'entre eux, on opère une greffe. Chaque semaine, si la greffe ne prend pas, on recommence jusqu'à ce qu'elle prenne effectivement.
On suppose que toutes ces expériences sont mutuellement indépendantes.
Les parties II et III sont indépendantes.

I Etude du nombre de greffes nécessaires pour que toutes les greffes prennent.

1. On appelle G le nombre de greffes nécessaires à la prise de la greffe d'un rosier donné.
Déterminer la loi de G, son espérance et sa variance.

2. On greffe simultanément R rosiers, qui seront numérotés de 1 à R. On désigne par X_k la variable aléatoire égale au nombre de greffes nécessaires à la prise du rosier k, $1 \leqslant k \leqslant R$, et par S_R le nombre total de greffes nécessaires pour que les greffes prennent sur les R rosiers. Les variables aléatoires X_k sont évidemment indépendantes.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoires X_k pour $1 \leqslant k \leqslant R$?

b) Exprimer S_R en fonction des X_k, pour $1 \leqslant k \leqslant R$.

c) Calculer l'espérance et la variance de S_R.

3. On se propose ici de trouver la loi de S_R.

a) Déterminer $S_R(\Omega)$ et montrer que par récurrence que :

$$\forall R \in \mathbb{N}^*, \forall k \in S_R(\Omega), P(S_R = k) = \binom{k-1}{R-1} p^R (1-p)^{k-R}.$$

b) En déduire $\sum\limits_{k=R}^{+\infty} \binom{k-1}{R-1} p^R (1-p)^{k-R}$.

c) Retrouver en utilisant la question précédente, l'espérance et la variance de S_R.

d) Démontrer que $\forall \epsilon > 0, \ \lim\limits_{R \to +\infty} P\left(\left|\frac{S_R}{R} - \frac{1}{p}\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$

II Etude du nombre de semaines nécessaires à la prise des greffes des R rosiers.

On appelle Y le nombre de semaines nécessaires à la prise des greffes des R rosiers. Pour chaque rosier, le nombre de semaines nécessaires est égal au nombre de greffes nécessaires.
Donc $Y = \max(X_1, \cdots, X_R)$, les variables X_k ayant été définies dans la partie I.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $P(Y \leqslant n) = (1-q^n)^R$.

b) En déduire que $P(Y = n)$

2. On cherche à déterminer l'espérance de Y.

On admet le lemme suivant (démontré dans le TD n°6) :

> Soit Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
> Alors Z admet une espérance si et seulement la série $\sum P(Z > n)$ converge.
>
> Dans ce cas, $E(Z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(Z > n)$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - (1 - q^n)^R$.

a) Donner un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

b) En déduire que $E(Y)$ existe et que $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

c) Calculer $E(Y)$ pour $R = 2$.

III Etude de l'évolution du processus

Dans cette partie, on étudie l'évolution du processus sur plusieurs semaines. Pour cela, on considère la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que Y_0 égale 0 et pour tout entier $n \geqslant 1$, Y_n est le nombre de rosiers dont la greffe a pris à l'issue de la n-ième semaine.
On considère la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$.

1. Que représente Z_n ?

2. Déterminer la loi de Y_1, donner son espérance et sa variance.

3. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y_{n+1} = k) = \sum_{m=0}^{k} P_{(Y_n=m)}(Z_n = k - m)P(Y_n = m)(\star).$$

b) Déterminer la loi conditionnelle de Z_n sachant que $[Y_n = m]$ et vérifier qu'elle ne dépend pas de n.

4. a) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que $k \leqslant R$,

$$P(Y_2 = k) = \sum_{m=0}^{k} \binom{R-m}{k-m} p^{k-m} q^{R-k} \binom{R}{m} p^m q^{R-m}.$$

b) Vérifier que pour tout $(k, m) \in \mathbb{N}^2$, tels que $0 \leqslant m \leqslant k \leqslant R$, $\binom{R}{m}\binom{R-m}{k-m} = \binom{R}{k}\binom{k}{m}$.

c) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N},\ k \leqslant R,\ P(Y_2 = k) = \binom{R}{k} p^k (q^2)^{R-k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} q^{k-m}$.

d) Montrer que $\forall k \in [\![0, R]\!],\ P(Y_2 = k) = \binom{R}{k}(p(1 + q))^k (q^2)^{R-k}$. et en déduire que Y_2 suit une loi binomiale dont on précisera le paramètres en fonction de R et de q.

5. En utilisant la relation $(\star)$, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n suit une loi binomiale de paramètre R et $1 - q^n$.

6. Pour tout $k \in [\![0, R]\!]$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n = k)$. Interpréter ce résultat.