TP N°4 : CALCUL APPROCHÉ D'INTÉGRALE

I Méthode des rectangles

✓ Rappel : Sommes de Riemman

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$,

alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

Interprétation graphique sur $[0,1]$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $S_n = \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$ et $T_n = \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$.

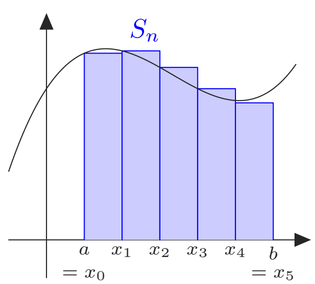
Comme $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$, il vient que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)$$

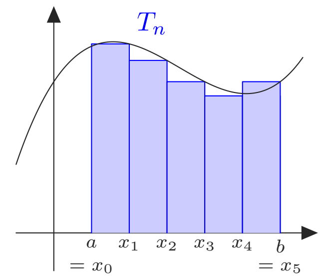
et

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})$$

S_n correspond à la somme des aires des rectangles de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$.



T_n correspond à la somme des aires des rectangles de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_{k+1})$.



✓ Exemple

1 On définit la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \exp\left(-\dfrac{k^2}{2n^2}\right)$

1. Justifier la convergence de la suite (u_n) et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ que l'on note J.
2. Ecrire une fonction `approx` de paramètre n qui renvoie u_n.
3. Tester le programme et faire afficher les valeurs de u_n pour $n = 10, 100, 1000$.
4. **Majoration de l'erreur commise ou vitesse de convergence**
   a) Etablir l'encadrement $u_n \leqslant J \leqslant u_n + \dfrac{1}{n}$.
   b) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} prés de J.
5. A l'aide de la méthode des rectangles, expliciter une autre suite (v_n) qui converge vers J et écrire une fonction `rectanglegauche(n)` qui permet de renvoyer v_n pour un entier naturel n non nul.

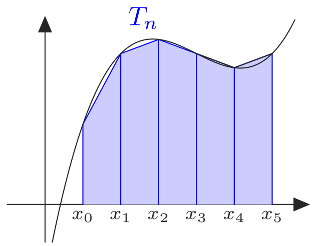
II Méthode des trapèzes

✓ Explication de la méthode

Soit f un fonction continue sur un segment $[a, b]$ et n un entier naturel non nul.

Notons $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k = a + k \times \dfrac{b-a}{n}$ (ces points correspondent à un découpage du segment $[a, b]$ en $n-1$ segments de même longueur.)

La méthode des trapèzes consiste à approcher sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, la fonction f par une fonction affine passant par les points de coordonnées $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ et donc l'aire sous la courbe de f par l'aire du trapèze formé par ces points et l'axe des abscisses. Puis on somme les aires obtenues.



✓ **Programmation**

$\boxed{2}$ Avec les notations précédentes :

1. Calculer la valeur de A_n.
2. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Ecrire une fonction `trapeze` de paramètres f, a, b et n qui permet de calculer A_n.
4. Application : On souhaite obtenir une valeur approchée de $J = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ par la méthode des trapèzes. Que doit-on faire ?
   Comparer vos résultats avec ceux de l'exercice n°1. (On pourra regarder la valeur de J à l'aide d'une calculatrice ou du module sympy évoqué dans la partie 3)
   Quelle méthode vous paraît-elle la plus efficace ?

III Compléments : Comparaison des deux méthodes

On souhaite comparer les vitesses de convergence des deux méthodes.

- L'erreur commise par la méthode des rectangles pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que $|f'| \leqslant M$ est majorée par $M\dfrac{(b-a)}{2n}$.
- L'erreur commise par la méthode des trapèzes pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $|f''| \leqslant M$ est majorée par $M\dfrac{(b-a)^2}{12n^2}$.

On peut comparer les deux méthodes avec le module sympy pour $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$:

Code

```python
import sympy as sp
sp.var('x')
a=float(sp.integrate(sp.exp(-x**2 / 2), (x,0,1)))
print('l'' intégrale ', a)
```

»> l'intégrale vaut 0.8556243918921488

	$n=10$	$n=100$	$n=1000$
`approx(f,n)`	0.874792	0.85758	0.85582
`trapeze(f,0,1,n)`	0.85511	0.855619	0.855624
erreur rectangle	0.019167	0.0019622	0.00019668
erreur trapèze	0.000505	5.054439e-06	5.054422e-08