TD N°8 : INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

1 Déterminer la nature de intégrales suivantes et déterminer leur valeur en cas de convergence :

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{(t-1)^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Pour b), on pourra commencer par montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\},\ \dfrac{1}{4-t^2} = \dfrac{a}{2+t} + \dfrac{b}{2-t}$.

2 Etudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

3 **(Utilisation d'une IPP)**

Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur valeur lorsque c'est possible :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)^p\,\mathrm{d}x$ avec $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

4 **(Utilisation d'un changement de variable)**

Etudier la nature de :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{t}+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$ $(u=\mathrm{e}^{t})$

5 1) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n puis calculer I_n en fonction de n.

3) Montrer que $\forall\lambda>0,\ \forall n\in\mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur en fonction de n et λ.

6 **(Comparaison série-intégrale)**

1) Etudier la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

2) Montrer que $\forall k\geq 2$, $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k\ln k}$

A l'aide d'un encadrement de $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln k}$

Remarque : on pourrait montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$

7 **(Utilisation du théorème de comparaison et/ou de l'absolue convergence)**

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)\sin(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2-2}\,\mathrm{d}u$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{ax}}\,\mathrm{d}x$ $(a\in\mathbb{R})$

8 **(Inspiré de G2E 2016, la fonction Gamma d'Euler)**

Soit Γ la fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par : $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner un équivalent en 0^+ de $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$.
2. Soit $x>0$.
   a) Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t}$ et en déduire qu'il existe $T>0$ tel que :
   $$\forall t\geqslant T,\ t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t}\leqslant 1.$$
   b) Montrer que $\displaystyle\int_T^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition de la fonction Γ.
4. a) Démontrer que $\forall x>0, \Gamma(x)>0$.
   b) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que $\forall x>0, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

c) Calculer $\Gamma(1)$ puis démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

5. a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

b) A l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera avec soin, démontrer que : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.