

PROGRAMME DE COLLE N°10

Un élève ne sachant pas son cours n'a pas la moyenne. La colle comportera une question de cours sans démonstration puis un ou plusieurs exercices.

INTÉGRALES SUR UN SEGMENT

Révisions du programme de première année.

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

- **Cas d'un intervalle semi-ouvert du type $[a, b]$** : Définition d'une intégrale impropre convergente, caractérisation à l'aide d'une primitive, intégrale faussement impropre.
- **Cas d'un intervalle semi-ouvert du type $]a, b]$** : Définition d'une intégrale impropre convergente, caractérisation à l'aide d'une primitive, intégrale faussement impropre.
- **Cas d'un intervalle ouvert** : convergence, caractérisation à l'aide d'une primitive, intégrale d'une fonction continue sauf en un nombre fini de points.
- **Les intégrales de références** : intégrales de Riemann (à savoir redémontrer), intégrale de Gauss (admise).
- **Propriétés des intégrales convergentes** : Relation de Chasles, linéarité, positivité, stricte positivité, croissance, intégration par parties, changement de variables, fonctions paires ou impaires.
- **Critère de convergence** : théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives (majoration et équivalence), absolue convergence.

VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

- **Définition d'une variable aléatoire à densité** : Définition d'une densité de probabilité, d'une variable aléatoire à densité, fonction de répartition, lien entre fonction de répartition et densité.
- **Trouver la loi de $u(X)$**

QUESTIONS DE COURS

✓ Intégrales généralisées

- 1) Si α est un réel quelconque, déterminer sur $]0; +\infty[$ l'expression d'une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.
- 2) Si f est la fonction définie sur $]0; 1[$ par : $f(x) = \sqrt{1-x}$, déterminer l'expression d'une de ses primitives sur l'intervalle $]0; 1[$.
- 3) Si α est un réel quelconque et f est la fonction définie sur $]0; 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$, déterminer l'expression d'une de ses primitives sur l'intervalle $]0; 1[$.
- 4) Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ sur \mathbb{R} où a un réel non nul.
- 5) Définir la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ pour une fonction f continue sur $[a, b]$
- 6) Que peut-on dire de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ lorsque f est une fonction paire ou impaire ?
- 7) Énoncer le théorème de convergence par comparaison pour les intégrales de fonctions positives. (majoration et équivalence)
- 8) Définir la notion d'absolue convergence de $\int_a^b f(t) dt$ pour une fonction f continue sur $[a; b[$ et donner le lien avec la convergence de cette intégrale.

✓ Variables aléatoires à densité

- 1) Définir la notion de densité de probabilité.
- 2) Soit X une variable aléatoire à densité de ddp f . Donner l'expression de sa fonction de répartition.
- 3) A quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?