

## PROGRAMME DE COLLE N°10

*Un élève ne sachant pas son cours n'a pas la moyenne. La colle comportera une question de cours sans démonstration puis un ou plusieurs exercices.*

### INTÉGRALES SUR UN SEGMENT

Révisions du programme de première année.

### INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

- **Cas d'un intervalle semi-ouvert du type  $[a, b[$**  : Définition d'une intégrale impropre convergente, caractérisation à l'aide d'une primitive, intégrale faussement impropre.
- **Cas d'un intervalle semi-ouvert du type  $]a, b]$**  : Définition d'une intégrale impropre convergente, caractérisation à l'aide d'une primitive, intégrale faussement impropre.
- **Cas d'un intervalle ouvert** : convergence, caractérisation à l'aide d'une primitive, intégrale d'une fonction continue sauf en un nombre fini de points.
- **Les intégrales de références** : intégrales de Riemann (à savoir redémontrer), intégrale de Gauss (admise).
- **Propriétés des intégrales convergentes** : Relation de Chasles, linéarité, positivité, stricte positivité, croissance, intégration par parties, changement de variables, fonctions paires ou impaires.
- **Critère de convergence** : théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives (majoration et équivalence), absolue convergence.

### VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

- **Définition d'une variable aléatoire à densité** : Définition d'une densité de probabilité, d'une variable aléatoire à densité, fonction de répartition, lien entre fonction de répartition et densité.
- **Trouver la loi de  $u(X)$**

## QUESTIONS DE COURS

✓ Intégrales généralisées

- 1) Si  $\alpha$  est un réel quelconque, déterminer sur  $]0; +\infty[$  l'expression d'une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ .
- 2) Si  $f$  est la fonction définie sur  $]0; 1[$  par :  $f(x) = \sqrt{1-x}$ , déterminer l'expression d'une de ses primitives sur l'intervalle  $]0; 1[$ .
- 3) Si  $\alpha$  est un réel quelconque et  $f$  est la fonction définie sur  $]0; 1[$  par :  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$ , déterminer l'expression d'une de ses primitives sur l'intervalle  $]0; 1[$ .
- 4) Donner une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$  sur  $\mathbb{R}$  où  $a$  un réel non nul.
- 5) Définir la convergence de  $\int_a^b f(t) dt$  pour une fonction  $f$  continue sur  $[a, b[$ .
- 6) Que peut-on dire de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  lorsque  $f$  est une fonction paire ou impaire ?
- 7) Énoncer le théorème de convergence par comparaison pour les intégrales de fonctions positives. (majoration et équivalence)
- 8) Définir la notion d'absolue convergence de  $\int_a^b f(t) dt$  pour une fonction  $f$  continue sur  $[a, b[$  et donner le lien avec la convergence de cette intégrale.

✓ Variables aléatoires à densité

- 1) Définir la notion de densité de probabilité.
- 2) Soit  $X$  une variable aléatoire à densité de ddp  $f$ . Donner l'expression de sa fonction de répartition.
- 3) A quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire  $X$  admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de  $X$  ?