CH10 : Variables aléatoires à densité-Fiche méthode

I Les savoir-Faire

- Savoir démontrer qu'une fonction f est une ddp.
- Savoir déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X de densité connue.
- Savoir montrer qu'une variable aléatoire est à densité lorsque l'on connaît sa fonction de répartition et savoir déterminer une de ses densités.
- Savoir calculer des probabilités du type $P(X < b)$, $P(a \leqslant X \leqslant b)$, $P(X > b)$ en utilisant soit une densité de X soit sa fonction de répartition.
- Savoir déterminer la fonction de répartition de $u(X)$ où X est une variable à densité.
- Savoir montrer que $u(X)$ est une variable à densité et déterminer une de ses densités.
- Savoir montrer que l'espérance, la variance, le moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité existent et savoir la/le calculer.
- Savoir utiliser le théorème de transfert pour une variable à densité.
- Connaître toutes les lois usuelles (uniforme, exponentielle, normale centrée et réduite , lois normales quelconques) : ddp, fonction de répartition, propriétés , espérance, variance et leur programmation en Python.
- Savoir utiliser les lois usuelles (ddp, espérance, variance) pour calculer certaines intégrales.
- Savoir utiliser et démontrer l'indépendance de deux variables aléatoires à densité.
- Savoir utiliser le produit de convolution.
- Savoir utiliser l'inégalité de Markov, BT et la loi faible des grands nombres.

II Résumé de cours

Définition 1 - densité de probabilité (ddp)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est une densité de probabilité (ddp) lorsque

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
2. $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geqslant 0$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Définition 2 - Variable aléatoire à densité

On dit qu'une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X est à densité s'il existe une densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

f est appelée densité de X, elle n'est pas unique.

Proposition 1 - (admise)

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f.
Alors sa fonction de répartition F_X est dérivable en tout point de continuité x de f et $F_X'(x) = f(x)$.

Proposition 2 - (admise)

Si f est une densité de probabilité, alors il existe une variable X dont f est une densité.

Proposition 3 - variable aléatoire à densité et fonction de répartition (admis)

X admet une densité si et seulement si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition 4 - Lien entre Fonction de répartition et ddp

Soit X une variable aléatoire à densité et F_X sa fonction de répartition.
Alors, toute fonction f à valeurs positives qui ne diffère de F_X' qu'en un nombre fini de points, est une densité de X.

Donner la loi d'une variable à densité X

Donner la loi de X, c'est justifier que X est une variable aléatoire à densité soit à partir d'une densité soit à partir de sa fonction de répartition et donner une de ses densités.

Propriété 1 - Calculs de probabilité

Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F et de densité f.

1. $P(X = a) = 0$ (on dit qu'une var à densité ne charge pas les points)
2. $P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
3. $P(X > a) = P(X \geqslant a) = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - F(a)$
4. $P(X < b) = P(X \leqslant b) = \int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)$

Trouver la loi de $Y = u(X)$

1. On détermine un intervalle dans lequel Y prend ses valeurs, cela permet de faciliter les disjonctions de cas.
2. On cherche la fonction de répartition de Y, F_Y, en utilisant celle de X.
3. Une fois F_Y déterminée, on montre que F_Y est la fonction de répartition d'une var à densité, c'est à dire F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
4. On donne une densité de Y en dérivant la fonction F_Y là où elle est dérivable et 0 par exemple, là où elle ne l'est pas.

Définition 3 - Espérance d'une VARD

Soit X une variable aléatoire de densité f_X.
X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} t \times f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

En cas d'absolue convergence, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque : La convergence suffit car la fonction $x \mapsto x f_X(x)$ est de signe négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. Donc l'absolue convergence revient à la convergence.

Remarque : Si f_X est nulle en dehors du segment $[a, b]$ et continue $[a, b]$, $E(X)$ existe et $E(X) = \int_a^b t f_X(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème 1 - Théorème de Transfert

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X, à valeurs dans un intervalle I.
Si u une fonction continue sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points alors

$E(u(X))$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_I u(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Dans ce cas, $E(u(X)) = \int_I u(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque : On pourra appliquer le théorème de transfert sans savoir si $u(X)$ est une variable discrètes ou à densité.

Définition 4 - Moments-Variance-Ecart-type

Soit X une variable aléatoire de densité f_X.

- **Moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}^*$):**
  X admet un moment d'ordre r si $E(X^r)$ existe c'est à dire ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
  En cas de convergence, $E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Variance**:
  X admet une variance si le moment centré d'ordre 2, $E((X-E(X))^2)$, existe c'est à dire si $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-E(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
  En cas de convergence $V(X) = E((X-E(X))^2)$.
- **Ecart-type**:
  Si X admet une variance , alors on définit toujours l'écart type comme étant la racine carrée de la variance, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Formule Huyghens-Koenig

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors X admet une variance et
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance. Alors :

1. $V(X) \geqslant 0$
2. $V(aX+b) = a^2 V(X)$
3. $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$

Définition 5 - Indépendance de deux variables à densité

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité.
On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ P((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y).$$

Proposition 5

X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout I et J intervalles réels,
$$P\left([X \in I] \cap [Y \in J]\right) = P\left(X \in I\right) P\left(Y \in J\right).$$

Définition 6 - Indépendance mutuelle de n variables aléatoires

Soit $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles.
Les variables aléatoires $X_1, ..X_n$ sont mutuellement indépendantes si
$$\forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant x_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i \leqslant x_i]).$$

Propriété 3 - Exploitation de l'indépendance mutuelle

- Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tous $I_1, \cdots I_n$ intervalles réels, $P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in I_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in I_i)$.
- Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.
- Si $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors pour toutes fonctions u et v sous de bonnes hypothèses, $u(X_1, \cdots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \cdots, X_{n+p})$ sont indépendantes.
- Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors pour toutes fonctions $u_1, .., u_n$ définie sur $\mathbb{R}$, $u_1(X_1), \cdots, u_n(X_n)$ sont indépendantes.

Proposition 6 - Espérance d'un produit de variables indépendantes

Soit X_1,..., X_n n var mutuellement indépendantes admettant chacune une espérance.
Alors $\prod_{i=1}^{n} X_i$ admet aussi une espérance et $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Proposition 7 - Variance d'une somme de variables indépendantes

Soit X_1,..., X_n mutuellement indépendantes admettant une variance.
Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ admet aussi une variance et

$$V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n),$$

et pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ admet une variance et

$$V(a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + ... + a_n^2 V(X_n).$$

Théorème 2 - Densité de la somme de deux var à densité indépendantes (admis)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densité respective f_X et f_Y.
alors $Z = X + Y$ est une variable aléatoire à densité et une densité f_Z est donnée par le produit de convolution :

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 8 - Inégalité de Markov

Pour X une variable aléatoire positive ou nulle admettant une espérance, alors:

$$\forall a > 0, P(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a} E(X).$$

Proposition 9 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une var admettant un moment d'ordre 2, alors

$$\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Proposition 10 - Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.e de même loi) , d'espérance m et de variance σ^2.
Alors :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$$

III les lois usuelles

Le tableau des lois usuelles est à apprendre par coeur, mais certaines propriétés supplémentaires à connaître figurent dans le cours.

1 Loi uniforme sur $[a; b]$ ou $]a; b]$ ou $[a; b[$ ou $]a; b[$

Loi uniforme

Soit $a < b$, Pour X qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$, notée $\mathcal{U}([a, b])$, on a :

- une densité de X : $f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \end{cases}$
- Sa fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$
- $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $\quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Remarque : On peut dire que X est à valeurs dans $[a, b]$.

Remarque : loi uniforme sur $]0,1[$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

Exemple 1 : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. **à savoir refaire !**

Modélisation

Elles servent à modéliser le choix d'un instant, d'une valeur au hasard dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
En Python dans le module `random` :
- `random()` simule une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.
- `a+(b-a)*random()` ou `uniform(a,b)` simule une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a,b]$.

2 Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

Loi exponentielle

Pour X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on a :

- une densité de X est $f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
- sa fonction de répartition $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Remarque : On peut dire que X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Remarque : Loi exponentielle de paramètre 1 :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Proposition 11 - absence de mémoire ou d'invariance temporelle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Alors :

$$\begin{cases} 1.\ \forall u \in \mathbb{R}_+,\ P(X > u) \neq 0 \\ 2.\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^2,\ P_{[X>u]}(X > u+v) = P(X > v) \end{cases}$$

Exemple 2 : Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow Y = \dfrac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (où $\lambda > 0$)

Exemple 3 : Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (où $\lambda > 0$).

Modélisation

Elles servent à modéliser les durées de vie pour des modèles sans usure ou sans mémoire : durée de "vie" d'un composant, durée d'un atome radioactif, durée d'une communication téléphonique.
En Python dans le module `random`,
- `-log(1-random())` simule une loi exponentielle de paramètre 1.
- `-(1/a)*log(1-random())` simule une loi exponentielle de paramètre a.
- `expovariate(a)` simule une loi exponentielle de paramètre a. (cette dernière fonction est aussi dans le module `random`.)

3 Lois normales

a Loi normale centrée réduite

Rappel Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$, c'est à dire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1$.

Loi normale centrée réduite

Pour X qui suit la loi normale centrée réduite que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$:

- une densité de X est : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
- sa fonction de répartition, $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$
- $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

Remarque : φ est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété 4

Φ possède les propriétés suivantes :

1. Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$
2. Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$, c'est à dire que $\Phi(\mathbb{R}) =]0,1[$.
3. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$

Modelisation

En Python, pour simuler une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite, il existe plusieurs possibilités :

- Dans le module random : `gauss(0,1)` ou `normalvariate(0,1)` simule une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
- Dans le module `scipy.stats`, `norm` appelle la loi normale centrée réduite et on peut :
  - ✓ `norm.pdf(x)` renvoie la valeur de $\varphi(x)$
  - ✓ `norm.cdf(x)` renvoie la valeur de $\Phi(x)$.
  - ✓ `norm.ppf(x)` renvoie la valeur de $\Phi^{-1}(x)$.

  `norm.ppf(random.random())` simule une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

b Lois normales quelconques

Lois normales

Pour X qui suit la loi normale de paramètres m et σ^2 ($\sigma > 0$), notée $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, on a :

- une densité est : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$
- sa fonction de réparition : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$
- $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$
- $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

Remarque : $\mathcal{C}_{f_X}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$.

Proposition 12 - Transformation affine d'une loi normale

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Alors
Pour tout a réel non nul et b un réel , $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2)$.

Proposition 13 - Somme de variables aléatoires indépendantes

- Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.

$$\text{Alors } X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

- Soit $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes telles que $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$.

$$\text{Alors } \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right).$$

Modélisation

Les lois normales jouent un rôle très important dans les modèles continus. Nous verrons plus tard la var égale à la somme de var mutuellement indépendantes et identiquement distribuées est proche d'une variable gaussienne.
Dans le module random :
- `gauss(mu,sigma)` ou `normalvariate(mu,sigma)` simule une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\text{mu}, \text{sigma}^2)$.
- `sigma*gauss(0,1)+mu` simule une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\text{mu}, \text{sigma}^2)$.