TD N°9 : Variables aléatoires à densité

1 ♥ Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-|t|} & \text{si } -\ln 2 \leq t \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer F_X sa fonction de répartition.
2) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3) Montrer que $Y = |X|$ est une variable à densité et déterminer une de ses densités.

2 ♥ (Loi exponentielle bilatérale)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité.
   Notons X une var à densité dont une densité est f.
2) Etudier l'existence et la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.
3) Calculer $P(X \geqslant -1)$.

3 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1) Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f. X admet-elle une espérance ?
3) On suppose de plus que X est à valeurs non nulles. Déterminer la loi de $Y = \dfrac{1}{X}$.

4 ♥ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{1+x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer la valeur du réel k pour que f soit une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f et soit $Y = \arctan X$. Déterminer la loi de Y.
3) Donner une instruction Python permettant de simuler X.
4) Trouver la probabilité pour que l'équation en v : $v^2 + vX + X = 0$ ait deux racines réelles distinctes.

5 ♥ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$. Déterminer la loi de X^2. Même question lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,2])$

6 Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre μ .
On définit les variables $Y = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X et $Z = X - \lfloor X \rfloor$.

1) ♥ Déterminer la loi de Y.
2) Déterminer la fonction de répartition de Z.
3) Calculer les espérances des variables Y et Z.
4) Donner une instruction pour simuler Y et Z.

7 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Pour $a > 0$, étudier l'existence de $E(a^X)$ et déterminer sa valeur.

8 ♥ (Calcul d'intégrales)

En utilisant une loi normale bien choisie, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2-4x-2}\,\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-2x^2-4x-2}\,\mathrm{d}x$

9 X suit la loi normale centrée réduite.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si X^n admet une espérance, alors X^{n+2} admet aussi une espérance. Donner une relation entre $E(X^n)$ et $E(X^{n+2})$.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X^{2n})$ et $E(X^{2n+1})$ existent et que l'on a :

$$E(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad E(X^{2n+1}) = 0.$$

10 (Loi Log-normale) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
Déterminer la loi de $Y = e^X$ (On dit que Y suit une loi log-normale) et calculer $E(Y)$ si elle existe.

11 Soit X et Y deux variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$ puis de $X - Y$.

12 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket -1, 1 \rrbracket)$ indépendantes. Déterminer la loi de la somme de $X + Y$.

13 Soit a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

1) Déterminer la fonction de répartition puis une densité de la variable aléatoire $(-X)$.
2) Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h, définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } t > 0 & h(t) = \dfrac{ab}{a+b} e^{-bt} \\ \text{pour } t \leqslant 0 & h(t) = \dfrac{ab}{a+b} e^{at} \end{cases}$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

3) Soit s un réel positif. Etablir l'égalité $P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b}$.
4) (a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
   (b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

14 **(Oral G2E)**
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0, 1]$. On définit la variable aléatoire W par $W = \mathbb{1}_{[XY \leqslant \frac{1}{2}]}$.

1) Déterminer une densité de $\ln(X) + \ln(Y)$.
2) En déduire la probabilité pour que $\ln(X) + \ln(Y) \leqslant -\ln(2)$. Préciser alors la loi de W.
3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1]$ et convergent de limite 0. Déterminer la limite éventuelle de $(P(XY \leqslant u_n))_{n \in \mathbb{N}}$

15 Montrer que la densité de probabilité d'une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur le segment $[0, 1]$ est donnée sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

16 Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et de $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

17

1) Soit $X_0, .., X_k$ des var indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
   Quelle est la loi de $U_k = \min(X_0, .., X_k)$?
2) Soit N une var suivant une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$, indépendante des (X_i).
   Quelle est la loi de $U = \min(X_0, \cdots, X_N)$?
3) Donner une instruction Python permettant de simuler U.

18 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Extraits de sujets de concours autour de la loi normale

19 On se donne deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes suivant toutes les deux la même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et on note φ une densité de X_1 et X_2 et Φ leur fonction de répartition.

Partie I Maximum et minimum (G2E 2024)

On note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

1. Déterminer à l'aide d'une variable aléatoire qui suit une loi normale la valeur de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Expliciter $\varphi(x)$ et vérifier que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

b) Exprimer $\Phi(x)$ à l'aide de φ.

3. a) Expliciter les fonctions de répartition de Y et de Z à l'aide de Φ.

b) En déduire que Y et Z admettent des densités que l'on exprimera à l'aide de Φ et φ.

4. a) Démontrer que Y admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale ci-dessous est convergente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties et de I, calculer cette dernière intégrale.

c) En déduire que Y admet pour espérance :

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

d) En justifiant que $Y + Z = X_1 + X_2$, en déduire également l'espérance de Z.

5. a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que Y^2 admet une espérance égale à 1.

b) En déduire que Y admet une variance que l'on déterminera.

6. On admet que Z^2 admet une espérance égale à 1 (on pourrait le démontrer à l'aide d'une intégration par parties).

a) En déduire que Z admet une variance que l'on déterminera.

b) Y et Z sont-elles indépendantes ?

Partie II Loi du Khi deux (MCR 2021)

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X^2.

2. Prouver que X^2 est une variable aléatoire de densité :

$$f_{X^2} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t).$$

3. On considère la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{d}t$.

On admet que h est correctement définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Prouver que h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera C cette constante.
On pourra utiliser le changement de variable $t = xu$.

4. On rappelle que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Déterminer en fonction de C la loi de $X_1^2 + X_2^2$.

b) En déduire C puis l'espérance et la variance de $X_1^2 + X_2^2$.

CORRECTIONS

19

Partie II Loi du Khi deux (MCR 2021)

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite.

3. On considère la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \mathrm{d}t$.

Soit $x > 0$. $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre convergente (admis) en 0 et en x.
On pose :

- $t = xu = \psi(u)$, ψ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]0,1[$.
- $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$
-

t	0	x
u	0	1

Comme $h(x)$ converge, alors

$$h(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xu(x-xu)}} x\,\mathrm{d}u$$
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du.$$

Puisque cette dernière quantité ne dépend plus de x, h est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$, notée C.

4. On rappelle que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Notons $R_1 = X_1^2$, $R_2 = X_2^2$ et $T = R_1 + R_2$.
Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, alors d'après le lemme des coalitions , R_1 et R_2 sont deux variables aléatoires indépendantes. De plus, ce sont des variables aléatoires à densité. Donc T est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par le produit de convolution :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_T(x) = \int_0^{+\infty} f_{R_1}(t) f_{R_2}(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} f_{R_2}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

$$f_{R_2}(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant t \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi(x-t)}} e^{-(x-t)/2} & \text{si } t < x \end{cases}.$$

On veut $\begin{cases} t > 0 \\ f_{R_2}(x-t) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t > 0 \\ t < x \end{cases} \iff t \in]0,+\infty[\cap]-\infty, x[$

- si $x \leqslant 0$, $f_T(x) = 0$ car $]0,+\infty[\cap]-\infty,x[= \varnothing$
- si $x > 0$, $]0,+\infty[\cap]-\infty,x[=]0,x[$

Donc $\displaystyle f_T(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(x-t)}} e^{-(x-t)/2}\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}} h(x)}{2\pi}$$
$$= \frac{Ce^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}$$

Donc $\boxed{f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{Ce^{-\frac{x}{2}}}{2\pi} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

b) On sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{Ce^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{C}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{C}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{où } f_A \text{densité de } A \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2})$$
$$= \frac{C}{\pi}$$

Ainsi $\dfrac{C}{\pi} = 1$ donc $\boxed{C = \pi}$.

D'où $f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2})$.

Ainsi $E(T) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ et $V(T) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$.

Remarque : on aurait pu aussi utiliser la linéarité de l'espérance et la variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes pour trouver ces résultats.