Agro - Mathématiques

Méthodes de calcul et raisonnement

2023

1. Par linéarité, il suffit de montrer la convergence de la série $\sum \frac{(\lambda x)^k}{k!}$, qui est une série exponentielle convergente.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $S(x)$ est bien définie, et $S(x) = e^{\lambda x - \lambda}$.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \geqslant 0$,

   $$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

   Ainsi, la fonction g est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

   Elle atteint donc un maximum en 1, qui vaut $e^{-1} - 1 < 0$.

   Ainsi, la fonction g est strictement négative sur $\mathbb{R}_+$.

3. Supposons donc $\lambda \leqslant 1$.

   La fonction ϕ est dérivable deux fois sur $[0,1]$, de dérivées

   $$\forall x \in [0,1],\ \phi'(x) = \lambda f(x) - 1,\ \text{et } \phi''(x) = \lambda^2 f(x).$$

   Ainsi, comme ϕ'' est strictement positive, la fonction ϕ' est strictement croissante sur $[0,1]$. Or $\phi'(1) = \lambda - 1 \leqslant 0$, donc la fonction ϕ' est strictement négative sur $[0,1[$.

   Par suite, la fonction ϕ est strictement décroissante sur $[0,1]$.

   On a alors $\phi(1) = 0$, et donc $\forall x < 1,\ \phi(x) > 0$.

   1 est donc bien l'unique solution de $f(x) = x$.

4. Supposons $\lambda > 1$.

   De même que précédemment, la fonction ϕ' est strictement croissante sur $[0,1]$. On a de plus $\phi'(1) = \lambda - 1 > 0$ et $\phi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 < 0$ par la question 2.

   La fonction ϕ' étant continue, par le théorème de la bijection, elle s'annule donc exactement une fois sur $[0,1]$, en α.

   La fonction ϕ est donc strictement décroissante sur $[0,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, 1]$.

   On a toujours $\phi(1) = 0$, et donc nécessairement, $\phi(\alpha) < 0$. Comme $\phi(0) > 0$, par continuité de ϕ et théorème de la bijection, on a bien un unique zéro x_λ de ϕ entre 0 et α.

   Finalement, on a bien exactement deux solutions pour l'équation $f(x) = x$: x_λ et 1.

5. On a $\mathbb{E}(T_1) = t_1 = \mathbb{V}(T_1)$.

6. L'univers image de $T_1 + T_2$ est $\mathbb{N}$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 + T_2 = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(T_1 = i \cap T_2 = k - i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(T_1 = i)\mathbb{P}(T_2 = k - i) \quad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-t_1 - t_2} \frac{t_1^i}{i!} \frac{t_2^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(t_1+t_2)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} t_1^i t_2^{k-i} \\
&= e^{-(t_1+t_2)} \frac{(t_1 + t_2)^k}{k!} \quad \text{par binôme de Newton}
\end{aligned}$$

   Ainsi, on a $T_1 + T_2$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $t_1 + t_2$.

7. Montrons par récurrence la propriété $P(n)$: « La variable $\sum\limits_{k=1}^{n} T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k$ ».

   - La propriété $P(1)$ est triviale.
   - Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$.
     On a alors $\sum\limits_{k=1}^{n+1} T_k = \sum_{k=1}^{n} T_k + T_{n+1}$.
     Par $P(n)$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} T_k \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} t_k\right)$, et est indépendante de T_{n+1}.
     Ainsi, par la question précédente, on a bien $P(n+1)$.

   Par récurrence, on a donc bien le résultat voulu.

8. La fonction a est continue sur I donc admet une primitive A.
   Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est donné par

$$\left\{ t \mapsto K e^{A(t)} \mid K \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. Soit f une solution de (E_1) qui s'annule sur I. Comme $e^{-A(t)}$ est toujours strictement positive, on a donc $K = 0$, et donc la fonction f est nulle sur I.

10. La fonction $g - C$ est dérivable sur I, et pour tout $t \in I$:

$$(g - C)'(t) = g'(t) = b(g(t))(g(t) - C).$$

    Ainsi, $g - C$ est bien solution de (E_3).

11. Supposons qu'il existe t_0 tel que $g(t_0) = C$.
    Alors $(g - C)(t_0) = 0$, et par la question 9, $g - C$ est la fonction nulle : la fonction g est donc constante égale à C.

12. Z_0 étant constante égale à 1, on a donc $p_0 = 0$.
    On a $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, donc $p_1 = e^{-\lambda}$.

L'ensemble $\{[Z_1 = n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, donc par formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
p_2 &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{Z_1} X_{1,k} = 0\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{1,k} = 0\right) \mathbb{P}(Z_1 = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\lambda} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{par la question 7} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\lambda}} \quad \text{par série exponentielle}
\end{aligned}$$

13. On a clairement pour tout $n \in \mathbb{N}$: $[Z_n = 0] \subseteq [Z_{n+1} = 0]$, et donc par croissance de la probabilité, $p_n \leqslant p_{n+1}$.

    Ainsi, la suite (p_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1, par théorème de la limite monotone, elle converge.

14. La famille $\{[Z_1 = k] \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, et donc par formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0)\mathbb{P}(Z_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} p_n^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= S(p_n)
\end{aligned}$$

15. Notons ℓ la limite de (p_n).

    Par la question précédente et continuité de S, on a donc $\ell = S(\ell)$.

    - si $\lambda \leqslant 1$, on a vu en question 3 que l'unique point fixe de S était 1, et donc $\ell = 1$.
    - si $\lambda > 1$, par la question 4, on a donc $\ell = x_\lambda$ ou $\ell = 1$.

      On note que $p_0 \leqslant x_\lambda$; par croissance de la fonction S, on a donc $p_1 \leqslant S(x_\lambda) = x_\lambda$.

      Une rapide récurrence permet alors de montrer que pour tout entier n, $p_n \leqslant x_\lambda$, ce qui exclut le cas $\ell = 1$.

      On a donc dans ce cas $\lim p_n = x_\lambda$.

16. Ainsi, si $\lambda \leqslant 1$, la population s'éteindra presque sûrement.

    Si $\lambda > 1$, elle s'éteindra avec probabilité x_λ, et donc pourra avec une probabilité non nulle se développer indéfiniment.

17. Supposons qu'on a une solution constante (C_1, C_2, C_3). On a alors, en réinjectant dans (2),

$$\begin{cases} C_1(C_2 - C_3) = 0 \\ C_2(C_3 - C_1) = 0 \\ C_3(C_1 - C_2) = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 = 1 \end{cases}$$

    La première ligne donne $C_1 = 0$ ou $C_2 = C_3$.

    Si $C_1 = 0$, alors la deuxième ligne donne $C_2 = 0$ ou $C_3 = 0$, et la dernière ligne nous donne alors respectivement $C_3 = 1$ ou $C_2 = 1$.

    Si $C_2 = C_3$, alors $C_2 = 0$ ou $C_1 = C_2$. Dans le premier cas, on trouve alors la solution $(1, 0, 0)$, et dans le second, $C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{3}$.

    Finalement, les triplets solutions sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

18. La méthode usuelle nous donne : $\mathrm{Spec}(M) = \{-i\sqrt{3}, 0, i\sqrt{3}\}$ avec

$$E_0(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ E_{i\sqrt{3}}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{pmatrix} \text{ et } E_{-i\sqrt{3}}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{pmatrix}.$$

19. La matrice M admettant trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, et donc on a $M = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & i\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & -i\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

20. Supposons que $A,\ B,\ C$ existent. On a alors, en mettant au même dénominateur et en identifiant les coefficients du numérateur

$$\begin{cases} 4A + 4B + C = 0\\ -7A - 3B - C = 0\\ 3A = 1\end{cases}$$

On trouve alors $A = \frac{1}{3}$, $B = 1$ et $C = -\frac{16}{3}$.

21. L'ensemble des primitives de h est donc donné par

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{3}\ln(x) + \ln(1-x) - \frac{4}{3}\ln(\frac{3}{4} - x) + K \mid K \in \mathbb{R}\right\}.$$

22. Par le théorème des valeurs intermédiaires, si x_1 dépassait $\frac{3}{4}$, alors il existerait un réel t_0 tel que $x_1(t_0) = \frac{3}{4}$.

Par la question 11, la fonction x_1 serait alors constante égale à $\frac{3}{4}$; or $x_1(0) < \frac{3}{4}$, on aboutit à une contradiction.

Ainsi, on a bien $x_1(t) < \frac{3}{4}$ pour tout t.

De même, si x_1 s'annulait, alors elle serait nulle sur $\mathbb{R}_+$, ce qui est impossible.

On a donc bien $x_1(t) \in]0, \frac{3}{4}[$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

23. On a donc avec (4) :

$$x_1' h \circ x_1 = 1, \text{ donc } (H \circ x_1)' = 1$$

où H est une primitive de h trouvée en 21.

On en déduit donc qu'il existe une constante K' telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $H(x_1(t)) = t + K'$.

On a donc

$$\frac{1}{3}\left(\ln(x_1(t)) + 3\ln(1 - x_1(t)) - 4\ln(\frac{3}{4} - x)\right) + K = t + K',$$

et on retrouve la propriété demandée par propriété du logarithme, en posant $D = K' - K$.

24. On note que d'après l'équation (5) et la question 22, $x_1' \geqslant 0$ et donc la fonction x_1 est croissante. Comme elle est majorée, elle admet bien une limite en $+\infty$.

On a par la question 23

$$e^{3(t+D)} = \frac{x_1(t)(1 - x_1(t))^3}{(x_1(t) - \frac{3}{4})^4}.$$

En passant à la limite, le terme de droite doit donc tendre vers $+\infty$.

La fonction x_1 étant bornée, on a donc nécessairement $x_1(t) \to \frac{3}{4}$.