TD N°9 : EXERCICE N° 19 INDICATIONS

On se donne deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes suivant toutes les deux la même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et on note φ une densité de X_1 et X_2 et Φ leur fonction de répartition.

Partie I Maximum et minimum (G2E 2024)

On note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

1. Déterminer à l'aide d'une variable aléatoire qui suit une loi normale la valeur de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
L'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une ddp vaut 1. On utilise ici T qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, ontrouve $I = \sqrt{\pi}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Expliciter $\varphi(x)$ et vérifier que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$. dérivée φ

b) Exprimer $\Phi(x)$ à l'aide de φ. lien entre ddp et fonction de répartion, c'est du cours

3. a) Expliciter les fonctions de répartition de Y et de Z à l'aide de Φ. Méthode classique du cours $F_Y(x) = \Phi(x)^2$ et $F_Z(x) = 1 - (1-\Phi)^2$

b) En déduire que Y et Z admettent des densités que l'on exprimera à l'aide de Φ et φ. Attention, vous devez démontrer que Y et Z sont des variables aléatoires à densité et calculer une ddp pour chaque variable , en dérivant .

4. a) Démontrer que Y admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale ci-dessous est convergente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x.$$

Ecrire la définition de l'espérance et utiliser la question 2)a)

b) À l'aide d'une intégration par parties et de I, calculer cette dernière intégrale.
colorred Attention intégration par partie sur un segment du type $[X,Y]$.
On primitive φ' et on dérive Φ puis on utilise 1)

c) En déduire que Y admet pour espérance :

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

d) En justifiant que $Y + Z = X_1 + X_2$, en déduire également l'espérance de Z.
utilisation des définitions des min et max pour montrer la première égalité et utiliser la linéarité de l'espérance pour calculer $E(Z)$.

5. a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que Y^2 admet une espérance égale à 1.
Ecrire la définition de $E(Y^2)$. Exprimer $t^2\varphi(t)$ en fonction de $\varphi''(t)$ et $\varphi(t)$ en dérivant l'égalité de la question 2a). Puis utiliser cette relation pour calculer $E(Y^2)$

b) En déduire que Y admet une variance que l'on déterminera.
Appliquer la formule de Huyghens

6. On admet que Z^2 admet une espérance égale à 1 (on pourrait le démontrer à l'aide d'une intégration par parties).

a) En déduire que Z admet une variance que l'on déterminera. Appliquer la formule de Huyghens

b) Y et Z sont-elles indépendantes ? calculer $V(Z+Y)$ et comparer avec $V(Z)$ et $V(Y)$ pour conclure

Partie II Loi du Khi deux (MCR 2021)

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X^2. c'est du cours

2. Prouver que X^2 est une variable aléatoire de densité :

$$f_{X^2} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t).$$

Appliquer la méthode classique pour calculer la fonction de répartition de X^2, montrer que X^2 est une variable à densité puis déterminer une densité de X^2. Attention la racine carrée n'est pas dérivable en 0 ! ! !

3. On considère la fonction $h : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{d}t.$
On admet que h est correctement définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Prouver que h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera C cette constante.

On pourra utiliser le changement de variable $t = xu$.

On prouve que $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\,\mathrm{d}u$, indépendant de x

4. On rappelle que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Déterminer en fonction de C la loi de $X_1^2 + X_2^2$.
Utiliser le produit de convolution pour calculer une densité de $X_1^2 + X_2^2$

b) En déduire C puis l'espérance et la variance de $X_1^2 + X_2^2$. intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une densité vaut 1, argument permettant de calculer C. On trouve $C = \pi$.
Puis plusieurs possibilités en utilisant la linéarité de l'espérance et la variance de la somme de deux variables indépendantes ou en reconnaissant une loi usuelle pour $T = X_1^2 + X_2^2$ et appliquer le cours. $E(T) = 2$ et $V(T) = 4$