Indications Modelisation 2021

La variole est une maladie virale sévère, éradiquée grâce à la vaccination en 1979. Les premières formes de vaccination (par inoculation) présentant un risque important, de nombreux débats eurent lieu pour décider du bien-fondé de la pratique. Daniel Bernoulli apporta en 1760 une résolution mathématique à ce problème, connue pour être un des premiers modèles biomathématiques.

L'idée de Bernoulli était de comparer l'espérance de vie de son époque (26 ans et 7 mois) avec une espérance de vie estimée pour une population fictive systématiquement inoculée contre la variole.

1- Calcul d'une espérance de vie

Dans cette partie on s'intéresse à une cohorte fictive non-soumise à la variole. Le temps sera noté t et décompté en années. On propose une première modélisation de l'évolution du nombre $z(t)$ d'individus de cette cohorte par l'équation :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = -\alpha z \\ z(0) = z_0 = 1300 \end{array}\right.$$

où le taux de mortalité α est constant et la fonction z est de classe C^1 sur R^+.

1. Donner la solution de l'équation différentielle (1) sur $\mathbf{R}^+$. C'est du cours équation différentielle du premier ordre, attention à bien utiliser la condition initiale $z(t) = 1300\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$

2. a) On définit la fonction F sur $\mathbf{R}^+$par $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$. Donner l'expression de $F(t)$ en fonction de $\frac{z(t)}{z_0}$. Que représente la quantité $F(t)$ par rapport à la cohorte ?
$\frac{z(t)}{z_0}$ est la proportion du nombre de survivants au temps t

b) Interpréter F en terme de lois de probabilités usuelles. En déduire l'espérance de vie $\mathcal{E}$ de la cohorte fictive après avoir justifié que cette espérance existe. On pourra voir l'espérance de vie comme l'espérance de la loi associée à F.
Reconnaître la fonction de répartition d'une loi usuelle sur $\mathbb{R}_+$

3. a) Soit $\Delta_t \in \mathbf{R}^+$un intervalle de temps. Que représente la quantité $z(t) - z(t + \Delta_t)$?

b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $t_i = i\Delta_t$. Donner une interprétation possible de la quantité $\mathcal{E}_{\Delta_t}$ suivante. On supposera que la somme est bien définie.

$$\mathcal{E}_{\Delta_t} = \frac{\sum_{i=0}^{+\infty} t_i\left(z\left(t_i\right) - z\left(t_{i+1}\right)\right)}{z_0}.$$

$\mathcal{E}_{\Delta_t}$ est la moyenne des proportions de morts sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, pondérée par les temps t_i. On peut l'interpréter comme le temps de vie moyen : cela fournira une valeur approchée de l'espérance de vie à la question 3.(c)).

c) On admettra que quand Δ_t tend vers 0 la quantité $\mathcal{E}_{\Delta_t}$ tend vers le rapport d'intégrales suivant qu'on supposera bien défini :

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \mathcal{E}_{\Delta_t} = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}$$

En calculant les deux intégrales (on peut penser à utiliser les propriétés de la loi usuelle reconnue dans 2b), le quotient vaut $\frac{1}{\alpha}$, grandeur homogène à un temps

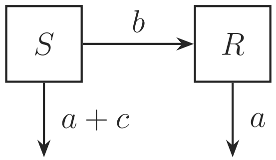
2-Modèle de Bernoulli

Dans cette partie on s'intéressera à la cohorte réellement observée par Bernoulli. Il s'agissait d'une cohorte de 1300 bébés nés la même année et suivis durant 84 ans. Cette cohorte est considérée comme négligeable au sein d'une population stable dont on supposera que les taux d'infection par variole et les taux de décès ne varient pas. On établira dans cette partie la relation entre cette cohorte et une cohorte fictive qui ne subirait pas la variole. Les fonctions suivantes du temps $t \in \mathbb{R}^+$(toujours décompté en années) seront utilisées :

- S, R : nombres d'individus respectivement susceptibles (c'est-à-dire n'ayant jamais été atteints par la variole) et remis (donc immunisés) dans la cohorte observée
- x : nombre de survivants dans la cohorte observée
- z : nombre d'individus dans une cohorte fictive, initialement identique à la cohorte suivie, mais qui ne serait pas touchée par la variole

Ces fonctions seront supposées de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Bernoulli pose le modèle suivant pour son problème :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dt}} &= -(a+b+c)S \\ \frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}} &= bS - aR \\ x &= R + S \end{cases}$$



où a est le taux de mortalité de cause indépendante de la variole par an, b est le taux d'individus susceptibles contractant la variole et guérissant par an et c est le taux d'individus susceptibles morts de la variole par an. Les taux b et c sont des constantes tandis que le taux a dépend du temps. On prendra $b = 7/64$ et $c = 1/64$.

1. a) Expliquer pourquoi Bernoulli n'a pas fait l'approximation de a constant dans son modèle.

On considère que a est variable puisque le taux de mortalité hors variole pourrait être modifié au cours des années ; présence d'autres épidémies, évènements de catastrophes naturelles, influence de la taille de la population etc.

b) Interpréter $-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et cS. Expliquer alors pourquoi $a = -\frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cS\right)$. x' correspond à une variation de la population, de quelle manière varie t-elle d'un instant à l'autre ?

c) Justifier que :

$$\frac{\mathrm{d}z}{dt} = \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cS\right)z$$

à rapprocher du modèle de la partie 1 : $z' = -az$ et utiliser la question précédente

2. a) Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par $q = \frac{x}{S}$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par q.

En utilisant les propriétés de la dérivation, on obtient : $q' = (b+c)q - c$

b) Résoudre l'équation différentielle et en déduire que :

$$q(t) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^{t/8}$$

On résout l'équation différentielle vérifier par q et n'oubliez pas que $q(0) = 1$

Ce résultat pourra être admis par la suite.

3. a) Soit H la fonction définie sur R^+par $H = \ln\frac{z}{x}$, exprimer $\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{dt}}$ en fonction de q. En déduire que :

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 + 7e^{t/8}}$$

Utilisation des propriétés de la dérivation et des formules obtenues précédemment : $H' = \dfrac{c}{q}$

Ce résultat pourra être admis par la suite.

b) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $G(t) = \frac{e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}$. On admettra que :

$$\frac{d\ln G}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ln\frac{z}{x}\right)$$

En déduire que :

$$z(t) = \frac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}x(t)$$

$\ln(G)$ et $\ln\frac{z}{x}$ ont la même dérivée, donc elles différent d'une constante. $G(0) = \dfrac{1}{8}$ et $\frac{z(0)}{x(0)} = 1$

4. Soit $y(t)$ le nombre d'individus dans une seconde cohorte fictive, initialement identique à la cohorte suivie, mais qui aurait été systématiquement inoculée. On donne $1/200$ la probabilité qu'un individu décède des suites de l'inoculation. Justifier que $y = \gamma z$ avec γ une constante à préciser.

$y = (1 - \dfrac{1}{200})z$

5. Ainsi l'évolution du nombre d'individus $y(t)$ d'une cohorte fictive systématiquement inoculée est donnée par :

$$y(t) = \gamma \times \frac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}x(t)$$

Utiliser la question 3c) de la partie 1 avec y à la place de z et $\Delta_t = 1$