TD N°10 : EQUATION DIFFÉRENTIELLE

1 Résoudre les équations différentielles :

1) sur $\mathbb{R}$, $y' - 2y - 2 = 0$
2) $xy' + 2y = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $y(1) = 0$ sur $]0; +\infty[$.
3) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1; +\infty[$
4) $y' + y = \mathrm{e}^x + x^2$ sur $\mathbb{R}$.

2 **(Equation différentielle autonome du type $y'(t) = F(y(t))$)**
Résoudre l'équation différentielle : $(E) : y' + \cos(y)^2 = 0$.

3 Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1) $y'' - 2y' + y = x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$
(solutions particulières sous la forme $y_1(x) = ax^3\,\mathrm{e}^x$ et sous la forme $y_2(x) = b\,\mathrm{e}^{2x}$)
2) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$ (solution particulière sous la forme $y_0(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$)

4 Résolution par changement de fonction
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)\,y = 1$.
On pourra poser $z = x^2y$.

5 Soit le système différentiel : $\begin{cases} z' = 2z - y + 2 \\ y' = z + 2y - 1 \end{cases}$ où y et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1) Justifier que y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer y puis z.

6

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' - y' + y = 0$.
2. En déduire l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x > 0\,,\ f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
On pourra raisonner par analyse/synthèse en posant $g(t) = f(e^t)$ et montrer que g vérifie (E).

7 **(Extrait Agro Veto Modelisation 2021)**
La variole est une maladie virale sévère, éradiquée grâce à la vaccination en 1979. Les premières formes de vaccination (par inoculation) présentant un risque important, de nombreux débats eurent lieu pour décider du bien-fondé de la pratique. Daniel Bernoulli apporta en 1760 une résolution mathématique à ce problème, connue pour être un des premiers modèles biomathématiques.

L'idée de Bernoulli était de comparer l'espérance de vie de son époque (26 ans et 7 mois) avec une espérance de vie estimée pour une population fictive systématiquement inoculée contre la variole.

1- Calcul d'une espérance de vie

Dans cette partie on s'intéresse à une cohorte fictive non-soumise à la variole. Le temps sera noté t et décompté en années. On propose une première modélisation de l'évolution du nombre $z(t)$ d'individus de cette cohorte par l'équation :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -\alpha z \\ z(0) = z_0 = 1300 \end{cases}$$

où le taux de mortalité α est constant et la fonction z est de classe C^1 sur R^+.

1. Donner la solution de l'équation différentielle (1) sur $\mathbf{R}^+$.

2. a) On définit la fonction F sur $\mathbf{R}^+$par $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$. Donner l'expression de $F(t)$ en fonction de $\frac{z(t)}{z_0}$. Que représente la quantité $F(t)$ par rapport à la cohorte ?

b) Interpréter F en terme de lois de probabilités usuelles. En déduire l'espérance de vie $\mathcal{E}$ de la cohorte fictive après avoir justifié que cette espérance existe. On pourra voir l'espérance de vie comme l'espérance de la loi associée à F.

3. a) Soit $\Delta_t \in \mathbf{R}^+$un intervalle de temps. Que représente la quantité $z(t) - z\left(t + \Delta_t\right)$?

b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $t_i = i\Delta_t$. Donner une interprétation possible de la quantité $\mathcal{E}_{\Delta_t}$ suivante. On supposera que la somme est bien définie.

$$\mathcal{E}_{\Delta_t} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} t_i \left(z\left(t_i\right) - z\left(t_{i+1}\right)\right)}{z_0}.$$

c) On admettra que quand Δ_t tend vers 0 la quantité $\mathcal{E}_{\Delta_t}$ tend vers le rapport d'intégrales suivant qu'on supposera bien défini :

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \mathcal{E}_{\Delta_t} = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} t \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}$$

Calculer ce rapport et faire le lien avec la question 2. Quelle est l'unité de α ? En déduire une interprétation de $1/\alpha$. Proposer une démarche pour calculer une approximation de l'espérance de vie d'une cohorte dont on ne connaîtrait que le nombre annuel de décès.

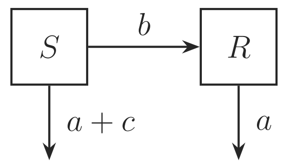
2-Modèle de Bernoulli

Dans cette partie on s'intéressera à la cohorte réellement observée par Bernoulli. Il s'agissait d'une cohorte de 1300 bébés nés la même année et suivis durant 84 ans. Cette cohorte est considérée comme négligeable au sein d'une population stable dont on supposera que les taux d'infection par variole et les taux de décès ne varient pas. On établira dans cette partie la relation entre cette cohorte et une cohorte fictive qui ne subirait pas la variole. Les fonctions suivantes du temps $t \in \mathbb{R}^+$(toujours décompté en années) seront utilisées :

- S, R : nombres d'individus respectivement susceptibles (c'est-à-dire n'ayant jamais été atteints par la variole) et remis (donc immunisés) dans la cohorte observée
- x : nombre de survivants dans la cohorte observée
- z : nombre d'individus dans une cohorte fictive, initialement identique à la cohorte suivie, mais qui ne serait pas touchée par la variole

Ces fonctions seront supposées de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Bernoulli pose le modèle suivant pour son problème :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}t} &= -(a+b+c)S \\ \frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}} &= bS - aR \\ x &= R + S \end{cases}$$



où a est le taux de mortalité de cause indépendante de la variole par an, b est le taux d'individus susceptibles contractant la variole et guérissant par an et c est le taux d'individus susceptibles morts de la variole par an. Les taux b et c sont des constantes tandis que le taux a dépend du temps. On prendra $b = 7/64$ et $c = 1/64$.

1. a) Expliquer pourquoi Bernoulli n'a pas fait l'approximation de a constant dans son modèle.

b) Interpréter $-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et cS. Expliquer alors pourquoi $a = -\frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cS\right)$.

c) Justifier que :

$$\frac{\mathrm{d}z}{dt} = \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cS\right) z$$

2. a) Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par $q = \frac{x}{S}$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par q.

b) Résoudre l'équation différentielle et en déduire que :

$$q(t) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^{t/8}$$

Ce résultat pourra être admis par la suite.

3. a) Soit H la fonction définie sur R^+par $H = \ln\frac{z}{x}$, exprimer $\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de q. En déduire que :

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 + 7e^{t/8}}$$

Ce résultat pourra être admis par la suite.

b) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $G(t) = \frac{e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}$. On admettra que :

$$\frac{d\ln G}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ln\frac{z}{x}\right)$$

En déduire que :

$$z(t) = \frac{8e^{t/8}}{1 + 7e^{t/8}}x(t)$$

4. Soit $y(t)$ le nombre d'individus dans une seconde cohorte fictive, initialement identique à la cohorte suivie, mais qui aurait été systématiquement inoculée. On donne $1/200$ la probabilité qu'un individu décède des suites de l'inoculation. Justifier que $y = \gamma z$ avec γ une constante à préciser.

5. Ainsi l'évolution du nombre d'individus $y(t)$ d'une cohorte fictive systématiquement inoculée est donnée par :

$$y(t) = \gamma \times \frac{8e^{t/8}}{1 + 7e^{t/8}}x(t)$$

Proposer une démarche pour calculer l'espérance de vie d'une population fictive systématiquement inoculée. On pourra utiliser la question 3. de la première partie.

CORRECTION MODÉLISATION 2021

1- Calcul d'une espérance de vie

Dans cette partie on s'intéresse à une cohorte fictive non-soumise à la variole. Le temps sera noté t et décompté en années. On propose une première modélisation de l'évolution du nombre $z(t)$ d'individus de cette cohorte par l'équation :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -\alpha z \\ z(0) = z_0 = 1300 \end{cases}$$

où le taux de mortalité α est constant et la fonction z est de classe C^1 sur R^+.

N'oubliez pas que $\frac{dz}{dt} = z'(t)$.

1. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficient constant.
Donc une solution est $z(t) = k\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}^+$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Or, $z(0) = 1300 = z_0 = k$.
Donc l'unique solution est $\boxed{\begin{array}{cccc} z : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & z_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \end{array}}$.

2. a) D'après 1., $\frac{z(t)}{z_0} = \mathrm{e}^{-\alpha t}$.

Pour tout $t \geqslant 0$, donc $F(t) = 1 - \frac{z(t)}{z_0} = \boxed{\dfrac{z_0 - z(t)}{z_0}}$.

Ainsi, $F(t)$ s'interprète comme la proportion de morts au temps t dans la population.

b) F coïncide sur $\mathbb{R}_+$ avec de la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{E}(\alpha)$.
Alors $P(X \leqslant t) = F(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et X peut-interprété comme la durée de vie des individus de la cohorte. D'après le cours, X admet une espérance et :

$$\boxed{\mathcal{E} = E(X) = \frac{1}{\alpha}.}$$

3. a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $\Delta_t \in \mathbf{R}^+$ un intervalle de temps.
La quantité $z(t) - z(t + \Delta_t)$ correspond au nombre de morts dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta_t]$.

b) $\mathcal{E}_{\Delta_t} = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} t_l\left(z\left(t_i\right) - z\left(t_{i+1}\right)\right)}{z_0}$.
$\mathcal{E}_{\Delta_t}$ est la moyenne des proportions de morts sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, pondérée par les temps t_i. On peut l'interpréter comme le temps de vie moyen : cela fournira une valeur approchée de l'espérance de vie à la question 3.(c)).

c)

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \mathcal{E}_{\Delta_t} = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}$$

Il s'agit de calculer les deux intégrales.
Utilisons X qui suit une loi $\mathcal{E}(\alpha)$, de densité f_X dont l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ vaut 1 et d'espérance $\frac{1}{\alpha}$:

$$\int_0^{+\infty} z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -z_0\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = -z_0 \int_0^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = -z_0$$
$$\int_0^{+\infty} tz'(t)\,\mathrm{d}t = -z_0 \int_0^{+\infty} \alpha t\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = -z_0 E(X) = -\frac{z_0}{\alpha}$$

Donc $\dfrac{\displaystyle\int_0^{+\infty} t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\alpha}$. En utilisant l'équation différentielle, α est homogène à l'inverse d'un temps. Donc

$\boxed{\frac{1}{\alpha} \text{ est homogène à un temps}}$.
Cette quantité pourrait donc correspondre au temps de vie cherché. Une façon de le calculer est donc de considérer par exemple $\Delta_t = 1$, les $z(t_i)?z(t_{i+1})$ correspondent donc aux relevés des nombres de décès sur une année. En calculant la quantité $\mathcal{E}_{\Delta_t}$ associée, on obtiendra alors une bonne approximation de $\frac{1}{\alpha}$.

2-Modèle de Bernoulli

on utilisera la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ou $f'(t)$ selon les cas.

1. a) On considère que a est variable puisque le taux de mortalité hors variole pourrait être modifié au cours des années ; présence d'autres épidémies, évènements de catastrophes naturelles, influence de la taille de la population etc.

b) D'après le système, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= R'(t) + S'(t) = -(-(a(t)+c)S(t) - a(t)R(t))\\ &= a(t)R(t) + (a(t)+c)S(t)\end{aligned}$$

La quantité $x'(t)$ correspond à la variation du nombre de survivants. La quantité $-x'(t)$ représente la variation du nombre de morts (dûs à la variole ou non).
Par ailleurs cS correspond au nombre de personnes du compartiment S des susceptibles morts de la variole, c'est à dire celles qui meurent sans jamais passer dans le compartiment R des remis.
D'après le système, il vient que

$x'(t) = -(a(t)+c)\mathrm{S} - a\mathrm{R} = -a(t)x(t)-$ donc $-(x'(t)+cS) = a(t)x(t)$

donc en divisant par x :

$$a = -\frac{1}{x}\,(x' + c\,\mathrm{S})$$

c) D'après le modèle, z décrit une population évoluant sans être touchée par la variole, donc est solution de

$$z' = -az.$$

Donc

$$z' = \frac{z}{x}(x' + cS) = \frac{1}{x}(x' + cS)z.$$

Ainsi $\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cS\right)z}$.

2. a) Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par $q = \frac{x}{S}$.

$$\begin{aligned}q' &= \frac{x' \cdot S - x \cdot S'}{S^2}\\ &= \frac{1}{S^2}\left((-ax - cS)S + xS(a+b+c)\right)\\ &= \frac{1}{S^2}\left(-cS^2 + xS(b+c)\right)\\ &= -c + \frac{x}{S}(b+c)\\ &= -c + q(b+c)\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{q \text{ est solution de } y' = (b+c)y - c.}$

b) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \geqslant 0$,

$$q(t) = k\,\mathrm{e}^{-(b+c)t} + \frac{c}{b+c},$$

or $q(0) = \frac{x(0)}{S(0)} = \frac{S(0)+R(0)}{S(0)} = \frac{S(0)}{S(0)} = 1$. Donc $1 = K + \frac{c}{b+c}$, ceci équivaut à

$$K = 1 - \frac{c}{b+c} = \frac{b}{b+c} = \frac{7/64}{8/64} = \frac{7}{8}.$$

Donc

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad q(t) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\,\mathrm{e}^{\,t/8}.}$$

3. a) Soit H la fonction définie sur R^+par $H = \ln \frac{z}{x}$.

$$\begin{aligned} H' &= \left(\ln\left(\frac{z}{x}\right)\right)' \\ &= \frac{(z/x)'}{(z/x)} \\ &= \frac{\frac{z'x - zx'}{x^2}}{\frac{z}{x}} \\ &= \frac{\frac{z'}{z}x - x'}{x} \\ &= \frac{-\cancel{ax} + cS + \cancel{ax}}{x} = \frac{cS}{x} = \frac{c}{q}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$,

$$H'(t) = \frac{c}{\frac{1}{8} + \frac{7}{8}\,\mathrm{e}^{\,t/8}} = \frac{1/8^2}{\frac{1}{8} + \frac{7}{8}\,\mathrm{e}^{\,t/8}} = \boxed{\frac{1}{8} \times \frac{1}{1 + 7\,\mathrm{e}^{\,t/8}}}.$$

b) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $G(t) = \frac{e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}$. On admet que : $\frac{d \ln G}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ln \frac{z}{x}\right)$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ l'égalité

$$(\ln G)' = \left(\ln \frac{z}{x}\right)'.$$

On obtient en intégrant de 0 à t les membres de cette égalité :

$$\ln G(t) - \ln G(0) = \ln \frac{z(t)}{x(t)} - \ln \frac{z(0)}{x(0)}$$

Comme$z(0) = x(0)$ et $G(0) = \dfrac{1}{8}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{8\,\mathrm{e}^{\,t/8}}{1 + 7\,\mathrm{e}^{\,t/8}}\right) &= \ln \frac{z(t)}{x(t)} \\ \frac{8\,\mathrm{e}^{\,t/8}}{1 + 7\,\mathrm{e}^{\,t/8}} &= \frac{z(t)}{x(t)}. \end{aligned}$$

On obtient alors l'égalité :

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad z(t) = \frac{8\,\mathrm{e}^{\,t/8}}{1 + 7\,\mathrm{e}^{\,t/8}} x(t)}.$$

4. Soit $y(t)$ le nombre d'individus dans une seconde cohorte fictive, initialement identique à la cohorte suivie, mais qui aurait été systématiquement inoculée.
La cohorte associée à y ne décède qu'à cause de la variole et des décès liés à z. Chaque individu de z a une « probabilité » $1 - \frac{1}{200} = \frac{199}{200}$ de survivre.
Donc $y = \frac{199}{200} z$, on choisit donc $\boxed{\gamma = \frac{199}{200}.}$

5. D'après la question 3. de la partie 1 on peut approcher l'espérance de vie de cette population fictive par

$$\mathcal{E}_{\Delta_t} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} i(y(i) - y(i+1))}{y_0} = \frac{\gamma}{y_0} \sum_{i=0}^{+\infty} i \frac{8e^{i/8}}{1 + 7e^{i/8}} (x(i) - x(i+1))$$

Il reste à fixer le pas de temps Δ_t. Dans la cohorte de Bernoulli, le plus petit pas de temps considéré est l'année.