CH10 : Equations différentielles

D1. Equation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme $(E) : y'+a(t)y = f(t)$ où a, f fonctions continues sur I.
On appelle solution de l'équation différentielle une fonction y dérivable sur I vérifiant (E).
Résoudre l'équation différentielle revient à trouver toutes les solutions de (E).

D2. Equation différentielle homogène associée

On appelle équation différentielle homogène associée à (E) : $(H) : y' + a(t)y = 0$.

T3. Structure des solutions d'une équa diff linéaire du premier ordre

Soit $(E) : y' + a(t)y = f(t)$ où a, f fonctions continues sur I et (H) son équation homogène associée.
Notons y_0 une solution particulière de (E).
Alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

$$\forall t \in I,\ y(t) = y_0(t) + y_H(t) \quad \text{avec} \quad y_H \quad \text{solution de} \quad (H).$$

T4. Résolution de $(H) : y' + a(t)y = 0$

Soit $(H) : y' + a(t)y = 0$ avec a une fonction continue sur I.
Notons A une primitive de a sur I.
Alors les solutions de (H) sont de la forme :

$$\forall t \in I,\ y_H(t) = k\mathrm{e}^{-A(t)} \quad \text{où } k \text{ est une constante réelle.}$$

T5. Solution particulière y_0 de $(E) : y' + a(t)y = f(t)$ (Méthode)

- On doit observer la nature des fonctions a et f (fonctions trigonométriques, fonctions polynômiales ou exponentielles), on pourra essayer de chercher y_0 de la même nature.

- Sinon, on peut utiliser la **méthode de la variation de la constante** :

Notons A une primitive de a sur I.
On définit y_0 sur I par $y_0(t) = k(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$, où k est dérivable sur I.
$y_0(t) = k(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ est solution de l'équation $(E) : y' + a(t)y = f(t)$ ssi $k'(t) = f(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
Donc k est une primitive de $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ que l'on calcule.
Puis on exprime y_0.

T6. Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$.

- Si $a = 0$, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = bx + c$ $(c \in \mathbb{R})$
- Si $a \neq 0$, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$ $(k \in \mathbb{R})$, c'est à dire la somme d'une solution de l'équation homogène $(y' + ay = 0)$ et d'une solution particulière $\frac{b}{a}$.

T7. Principe de superposition

Soit a, f_1 et f_2 des fonctions continues sur I et α, β deux réels.
Notons,

- y_1 une solution de l'équation différentielle : $y' + ay = f_1$,
- y_2 une solution de l'équation différentielle : $y' + ay = f_2$.

Alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation différentielle : $y' + ay = \alpha f_1 + \beta f_2$.

D8. Équation différentielle du premier ordre autonome (programme 2 ème année)

Une équation différentielle du premier ordre est autonome si $y' = F(y)$ où F est une fonction continue sur un intervalle et à valeurs réelles.

D9. Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est de la forme $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$ où a, b sont des réels et f une fonction continue sur I.
On appelle solution de l'équation différentielle une fonction y deux fois dérivable sur I vérifiant (E).
Résoudre l'équation différentielle revient à trouver toutes les solutions de (E).

Remarque : (E) peut-être aussi écrit sous la forme $ay'' + by' + cy = f(t)$ où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$.

D10. Équation différentielle homogène associée

On appelle équation différentielle homogène associée à (E) : $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

T11. Structure des solutions d'une équa diff linéaire du second ordre à coefficients constants

Soit $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$ où a, b sont des réels et f une fonction continue sur I et (H) son équation homogène associée.
Notons y_0 une solution particulière de (E).
Alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

$$\forall t \in I,\ y(t) = y_0(t) + y_H(t) \quad \text{avec} \quad y_H \quad \text{solution de} \quad (H).$$

T12. Résolution de $(H) : y'' + ay' + by = 0$

Soit l'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Notons $(C) : r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique.
Alors les solutions de (H) sont les fonctions s'écrivant sous la forme :

- Si (C) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 : $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Si (C) admet une solution unique r_0 : $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda + \mu t)e^{r_0 t} \end{array}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Si (C) n'admet aucune solution réelle : $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \end{array}$ où $\alpha + i\beta$ est une solution de (C) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Intermède complexe : Si l'énoncé demande de chercher des solutions à valeurs complexes :

- Si (C) admet deux solutions complexes conjuguées r_1 et r_2, alors les solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle sont de la forme : $y_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.
- Si (C) admet une seule solution r_0 , alors les solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle sont de la forme : $y_H(t) = (A + Bt)e^{r_0 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

T13. Recherche d'une solution particulière de $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$

- Si $f(t) = c$, avec $c \in \mathbb{R}$, **(cas à connaître)**
  - ⋄ Si $b \neq 0$, on cherche une solution constante : $y_0(t) = \dfrac{c}{b}$.
  - ⋄ Si $b = 0$, (E) devient alors $y'' + ay' = c$, équation du premier ordre à coefficients constants).
  Deux cas si $a = 0$ ou $a \neq 0$:
    - * Si $a = 0$, (E) devient $y'' = c$ et par primitivations successives, $y_0(t) = c\dfrac{t^2}{2} + kt + \ell$, avec $k, \ell \in \mathbb{R}$.
    - * Si $a \neq 0$, on cherche une fonction affine de la forme $y_0(t) = ut + v$. (on trouve $u = \dfrac{c}{a}$.)

Si f n'est pas une fonction constante, rien n'est à connaître, la forme de la solution sera donnée, avec notamment deux cas les plus fréquents :

- Si $f(t) = P(t)e^{mt}$ où P est une fonction polynôme et $m \in \mathbb{R}$,
on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{mt}$, avec Q fonction polynôme à déterminer, dont le degré sera précisé.
- Si $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $f(t) = \cos(\omega t)$,
on cherchera une solution particulière sous la forme $y_P(t) = \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ ou $y_P(t) = \lambda t \sin(\omega t) + \mu t \cos(\omega t)$ selon les cas, les constantes λ et μ étant à déterminer.

T14. Principe de superposition

Soit a, b deux réels et f_1 et f_2 des fonctions continues sur I et α, β deux réels.
Notons,

- y_1 une solution de l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = f_1$,
- y_2 une solution de l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = f_2$.

Alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = \alpha f_1 + \beta f_2$.