DM n°5 : 2025-2026

Exercice Agro CR 2018 :

Soit c un réel strictement positif.
On considère une variable aléatoire réelle X de densité :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{c^2} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2c^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0. \end{cases}$$

1. Etudier la fonction f : les variations, limite en $+\infty$, valeur du maximum. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité.
3. (a) Rappeler, sans justification, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2c^2}} \, \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

   (c) Prouver que la variable aléatoire X admet une espérance.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que si la variable aléatoire X^n admet une espérance, alors la variable aléatoire X^{n+2} possède une espérance donnée par :

$$E(X^{n+2}) = c^2(n+2)E(X^n).$$

5. En déduire par récurrence, que pour tout entier n, on a :

$$E(X^{2n}) = 2^n c^{2n} n! \quad \text{et} \quad E(X^{2n+1}) = \sqrt{2\pi}\frac{(2n+1)!c^{2n+1}}{2^{n+1}n!}.$$

6. (a) Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.

   (b) Déterminer la variance de X.

   (c) En déduire un intervalle $[\alpha, \beta]$ tel que $P(X \in [\alpha, \beta]) \geqslant 99\%$.
7. Déterminer un réel positif γ tel que $P(X \in [0, \gamma]) = 99\%$.
8. Comparer les intervalles obtenus aux deux questions précédentes.

On pourra admettre que $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} - 10\sqrt{\dfrac{4-\pi}{2}} < 0$

Problème Agro Modélisation 2015 :

Dans ce problème, $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+^*$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers naturels non nuls, des nombres réels, des nombres réels strictement positifs.

Pour $\alpha \in \mathbf{R}$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$, on définit la fonction $\ell_{\alpha,r}$ sur $\mathbf{R}$ par

$$\ell_{\alpha,r}(t) = \begin{cases} \alpha \dfrac{t^{\alpha-1}}{r^\alpha} & \text{si } t \in]0, r[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\ell_{\alpha,r}$ est une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Dans toute la suite de ce problème, on supposera cette condition réalisée.

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la *loi $\mathscr{L}$ de paramètres α et r* si X admet $\ell_{\alpha,r}$ pour densité. On notera

$$X \hookrightarrow \mathscr{L}(\alpha, r)$$

cette propriété.

Dans toute la suite de ce problème, on note X une variable aléatoire de loi $\mathscr{L}(\alpha, r)$.

2. On s'intéresse tout d'abord aux propriétés élémentaires de cette loi.

2.1 Déterminer la fonction de répartition F de X.

2.2 Que vaut $P(X \leq 0)$?

2.3 Reconnaître la loi de la variable aléatoire $W = -\ln\left(\dfrac{X}{r}\right)$.

3. Soit $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+^*$. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ respectivement.

3.1 Donner une densité de $-U_2$.

3.2 On rappelle que si V_1 et V_2 sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives v_1 et v_2, alors $Z = V_1 + V_2$ est encore une variable aléatoire réelle à densité, dont une densité est donnée par $z : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(u)v_2(t-u)\,du$. Montrer qu'une densité de $U_1 - U_2$ est donnée par

$$g_{\lambda,\mu} : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0, \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu t} & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

3.3 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, respectivement de lois $\mathscr{L}(\alpha, r)$ et $\mathscr{L}(\beta, s)$ avec $(\alpha, \beta, r, s) \in (\mathbf{R}_+^*)^4$. À l'aide de la question qui précède et de la question 2.3., donner la loi de $Z = -\ln\left(\dfrac{sX}{rY}\right)$ et en déduire que

$$P(X < Y) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{s}{r}\right)^{\alpha} & \text{si } s < r, \\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{r}{s}\right)^{\beta} & \text{si } r \leq s. \end{cases}$$

4. On applique maintenant le résultat de la question précédente à un modèle de test de dépistage d'une maladie canine H au sein d'une population $\mathcal{P}$. La présence de cette maladie chez un individu de $\mathcal{P}$ se note par la modification de la loi de concentration de deux bactéries A et B présentes dans l'estomac. Plus précisément, ces concentrations respectives X et Y, en $\text{UFC}\,\text{ml}^{-1}$ (Unité Formant Colonie par millilitre), sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\mathscr{L}(\alpha, r)$ et $\mathscr{L}(\beta, s)$, avec $(\alpha, \beta, r, s) \in (\mathbf{R}_+^*)^4$. On a statistiquement les valeurs suivantes :

– Pour les sujets *non atteints* de la maladie H :

$$\alpha = 2 \quad ; \quad \beta = 3 \quad ; \quad r = 100\,\text{UFC}\,\text{ml}^{-1} \quad ; \quad s = 50\,\text{UFC}\,\text{ml}^{-1}.$$

– Pour les sujets *atteints* de la maladie H :

$$\alpha = 4 \quad ; \quad \beta = 2 \quad ; \quad r = 400\,\text{UFC}\,\text{ml}^{-1} \quad ; \quad s = 800\,\text{UFC}\,\text{ml}^{-1}.$$

Le test T consiste à effectuer un prélèvement sanguin d'un individu C de $\mathcal{P}$. Une fois ce prélèvement mis en culture dans des conditions adéquates, les deux bactéries A et B entrent en concurrence. Au bout de quelques heures, seule celle dont la concentration était la plus forte subsiste, l'autre ayant totalement disparu. Cette procédure permet donc de savoir lequel des événements $\{X < Y\}$ ou $\{X > Y\}$ est réalisé pour C. On note $R = \{X < Y\}$. Le test T est positif si R est réalisé, négatif sinon. On note M l'événement « le sujet $C \in \mathcal{P}$ est atteint de la maladie H ». L'événement contraire d'un événement E sera systématiquement noté $\overline{E}$ dans la suite.

4.1 Donner les probabilités conditionnelles $P(R|M) = P_M(R)$ et $P(R|\overline{M}) = P_{\overline{M}}(R)$.

4.2 Un sondage a permis d'estimer $P(M) = \frac{1}{40}$. Donner la probabilité qu'un sujet testé soit atteint de la maladie H sachant que son test T est positif. Qu'en pensez-vous ?