

FICHE N°25BIS : LIMITES

La première chose à faire pour calculer une limite est de chercher si on a une forme indéterminée. Si non on calcule la limite. Si oui, il faut alors repérer les termes qui posent des problèmes et essayer de se ramener aux formes indéterminées qui sont levées dans le cours en utilisant si nécessaire les formules sur les $\ln$ et les $\exp$, des factorisations, les quantités conjuguées, un changement de variables etc.... Pour cela, il faut absolument connaître par coeur les différentes formes indéterminées qui sont levées dans le cours pour avoir l'intuition de celle qui va nous aider !

Attention pour bien connaître une forme indéterminée du cours, il faut retenir :

1. **vers quelle valeur tend x**
2. **quelle est l'expression exacte de la fonction, les conditions sur les paramètres s'il y en a**
3. **la valeur de la limite**

Les exercices de 1 à 6 proposent différentes méthodes pour s'en sortir dans un certain nombre de situations. La liste n'a pas la prétention d'être exhaustive.

1 Application directe des formes indéterminées du cours

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(4x))^2}{\sqrt{x}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x - x^3$$

2 Attention aux faux amis...

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(4x))^2 \sqrt{x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}}{x^3}$$

3 Factorisation par le terme "le plus massif"

Cette technique s'applique à toute forme indéterminée en 0 ou en $+\infty$.

C'est une méthode efficace quand vous n'avez pas de composition de fonctions. Le seul écueil qui peut apparaître est la présence de deux termes de forces identiques dans une addition. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} - (\ln(x))^5 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + x^2}{2\sqrt{x} + \ln(x)x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln x$$

4 Simplification polynômiale

Cette technique marche pour les formes indéterminées $\frac{0}{0}$ en x_0 d'une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes. x_0 est alors racine du numérateur et du dénominateur.

On factorise donc le numérateur et le dénominateur par $(x - x_0)$ pour "simplifier les zéros".

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$

5 Utilisation de la quantité conjuguée

Cette technique permet de lever des formes indéterminées où apparaissent des formes $\sqrt{a} - b$ ou $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-x^2} - 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

6 Utilisation d'un équivalent avec changement de variables

Penser à $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et à $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$. On essaie de faire apparaître un de ces deux quotients ou tout autre équivalent avec un "u" bien choisi tendant vers 0. Puis on utilise un changement de variable pour calculer la limite. Même technique pour toutes autres formes indéterminées levées dans le cours.

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp\left(\frac{1}{x}\right) - x & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^3 - x^2 - x + 1)}{x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4}{x} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^4} - 1}{x^4 + x^8} \end{array}$$

CORRECTION FICHE N°25BIS

1 Application directe des formes indéterminées du cours

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(4x))^2}{\sqrt{x}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x - x^3$$

Correction :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0 \text{ (CC)}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(4x))^2}{\sqrt{x}} = 0 \text{ (CC)}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \text{ (CC) donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x - x^3 = 0$$

2 Attention aux faux amis...

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(4x))^2 \sqrt{x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}}{x^3}$$

Correction : Ici ce sont seulement des produits ou quotient de limites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ pas de forme indéterminée}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(4x))^2 \sqrt{x} = +\infty \text{ pas de forme indéterminée}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty \text{ pas de forme indéterminée}$$

3 Factorisation par le terme "le plus massif"Cette technique s'applique à toute forme indéterminée en 0 ou en $+\infty$.

C'est une méthode efficace quand vous n'avez pas de composition de fonctions. Le seul écueil qui peut apparaître est la présence de deux termes de forces identiques dans une addition. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} - (\ln(x))^5 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + x^2}{2\sqrt{x} + \ln(x)x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln x$$

Correction :

$$\text{a) } \sqrt{2x} - (\ln(x))^5 = \sqrt{2x} \left(1 - \frac{(\ln(x))^5}{\sqrt{2x}} \right). \text{ Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^5}{\sqrt{2x}} = 0 \text{ (CC).}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{(\ln(x))^5}{\sqrt{2x}} = 1. \text{ D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} - (\ln(x))^5 = +\infty \text{ par produit de limites.}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{x} + x^2}{2\sqrt{x} + \ln(x)x} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}(1 + x^{3/2})}{2\cancel{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{2}\right)} = \frac{1 + x^{3/2}}{2\left(1 + \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{2}\right)}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0 \text{ (CC) donc par opérations } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\left(1 + \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{2}\right) = 2$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^{3/2} = 1. \text{ D'où par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + x^2}{2\sqrt{x} + \ln(x)x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^{3/2}}{2\left(1 + \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{c) } \frac{1}{x} + \ln x = \frac{1}{x} (1 + x \ln(x))$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \text{ (CC) donc par somme } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x \ln(x) = 1.$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \text{ Donc par produit, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 + x \ln(x)) = +\infty.$$

4 Simplification polynômiale

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$.

Correction :

On remarque que 1 est une racine du numérateur et du dénominateur. On peut les factoriser par $(x - 1)$.

On a :

- $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ (avec les deux racines évidentes ou le discriminant)
- En écrivant que $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ et en identifiant les coefficients, on obtient $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1)$.

Donc en simplifiant, on a : $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$.

D'où, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} = -1$.

5 Utilisation de la quantité conjuguée

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2} - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$

Correction :

a) $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2} - 1} = \frac{x(\sqrt{1 - x^2} + 1)}{(\sqrt{1 - x^2} - 1)(\sqrt{1 - x^2} + 1)} = \frac{x(\sqrt{1 - x^2} + 1)}{1 - x^2} = \frac{-(\sqrt{1 - x^2} + 1)}{x}$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} -(\sqrt{1 - x^2} + 1) = -2$ donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(\sqrt{1 - x^2} + 1)}{x} = -\infty$

b) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = 0$.

6 Utilisation d'un équivalent avec changement de variables

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp\left(\frac{1}{x}\right) - x$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^3 - x^2 - x + 1)}{x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4}{x} \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^4} - 1}{x^4 + x^8}$

Correction :

Telles qu'elles sont données, on constate que chacune des limites est une forme indéterminée; on va utiliser les équivalents pour lever l'indétermination.

a) $x \exp\left(\frac{1}{x}\right) - x = x \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right)$

$\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

Donc $x \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{x \times \frac{1}{x}}_{=1}$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp\left(\frac{1}{x}\right) - x = 1$.

b) $\ln(1 + x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$ car $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

Donc $\frac{\ln(1 + x^2)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x}$, c'est à dire que $\frac{\ln(1 + x^2)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

c) $\ln(1 + \frac{2}{x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x}$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$

Donc $x \ln(1 + \frac{2}{x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{x \times \frac{2}{x}}_{=2}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{2}{x}) = 2$.

d) $\ln(x^3 - x^2 - x + 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3 - x^2 - x$ car $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 - x^2 - x = 0$ et $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

De plus, $x^3 - x^2 - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$ (un polynôme en 0 est équivalent à son terme de plus bas degré).

Donc par transitivité, $\ln(x^3 - x^2 - x + 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$

Ainsi, $\frac{\ln(x^3 - x^2 - x + 1)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -1$. D'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^3 - x^2 - x + 1)}{x} = -1$.

Remarque : On peut se passer d'écrire $x^3 - x^2 - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$ pour calculer la valeur de la limite, mais c'est dans l'esprit de toujours donner immédiatement un équivalent le plus simple possible.

e) Un polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré. Par conséquent, $\frac{x^2+4}{x} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{4}{x} \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$

En posant $u = \frac{1}{x}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0$ (CC), donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+4}{x} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$.

f) $\sqrt{1+x^4} - 1 = (1+x^4)^{\frac{1}{2}} - 1$.

$(1+x^4)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^4$ car $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$ et $(1+u)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}u$.

$x^4 + x^8 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^4$.

Donc $\frac{\sqrt{1+x^4} - 1}{x^4 + x^8} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \underbrace{\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4}}_{=\frac{1}{2}}$.

D'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - 1}{x^4 + x^8} = \frac{1}{2}$.