

FORMULAIRE D'ANALYSE

Partie entière, Valeur absolue

Partie entière

Pour tout réel x , il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier, noté $\lfloor x \rfloor$, est appelé partie entière de x .

Encadrements à retenir $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

Valeur absolue

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x , et on note $|x|$, le réel défini par :

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés de la valeur absolue :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) on a :

- $|xy| = |x||y|$ $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ (avec $y \neq 0$)
- $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ et $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ (inégalités triangulaires)
- $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$

Les sommes finies, factorielle et coefficients binomiaux

Factorielle : $0! = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \cdots \times (n-1) \times n = n \times (n-1)!$

Coefficients binomiaux : pour $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$

Pour tout $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie) et $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$

Formule du triangle de Pascal Pour tout $1 \leq k \leq n+1$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Les sommes finies incontournables :

$$\begin{array}{l} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=n_0}^n q^k = \begin{cases} q^{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n - n_0 + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases} \end{array}$$

Formule du binôme de Newton : Pour a et b deux réels et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Les suites usuelles

Les suites arithmétiques :

✓ Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique de raison r (indépendant de n) si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n + r$.

✓ Terme général

Pour $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r , on a $\forall (n, p) \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket, u_n = u_p + (n - p)r$.

✓ Somme des premiers termes :

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne des termes extrêmes :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq p, \text{ on a } \sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Les suites géométriques :

✓ Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique de raison q (indépendant de n) si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = qu_n$.

✓ Terme général

Pour $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q , on a $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$.

✓ Somme des premiers termes :

$$\text{Si } q = 1, \forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k = (n - n_0 + 1)u_{n_0}.$$

$$\text{Si } q \neq 1, \forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k = u_{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}.$$

Les suites arithmético-géométriques :

✓ Définition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq 1, b \neq 0$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmético-géométrique si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = au_n + b$.

✓ Terme général

Si la suite (u_n) est arithmético-géométrique, on doit appliquer la démarche suivante :

- On résout l'équation « $x = ax + b, x \in \mathbb{R}$ », on note ℓ la solution ($\ell = \frac{b}{1-a}$)
- On montre que la suite $(u_n - \ell)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_{n_0} - \ell$
- On utilise l'expression explicite d'une suite géométrique : $\forall n \geq n_0, u_n - \ell = (u_{n_0} - \ell)a^{n-n_0}$
- Puis on conclut en donnant l'expression générale de u_n : $\forall n \geq n_0, u_n = a^{n-n_0}(u_{n_0} - \ell) + \ell$.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

✓ Définition

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

On dit que la suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants) .

✓ Terme général

On résout l'équation caractéristique : $(E) : \ll z \in \mathbb{C}, z^2 - az - b = 0 \gg$.

- Si (E) possède 2 solutions réelles r_1 et r_2 . Il existe alors un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

- Si (E) possède une unique solution r . Il existe alors un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n)r^n.$$

- Si (E) possède deux solutions complexes conjuguées, $z = r e^{i\theta}$ et $\bar{z} = r e^{-i\theta}$. Il existe alors un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \operatorname{Re}(z^n) + \beta \operatorname{Im}(z^n) = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).$$

La détermination de α et β se fait au cas par cas à partir de deux termes de la suite, en général les deux premiers.

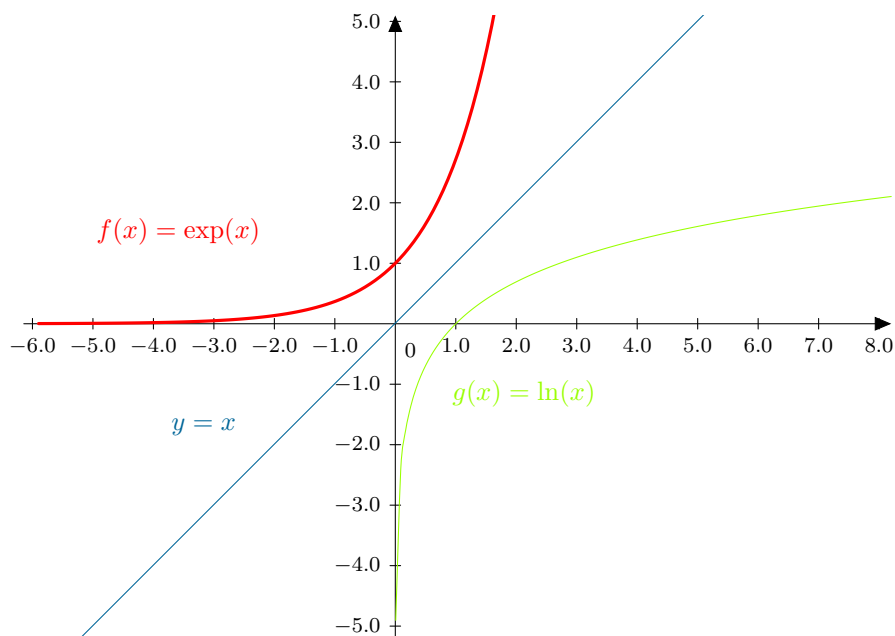
Les fonctions usuelles et leur représentation graphique

Les fonctions logarithmes et exponentielles

La fonction $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$ comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1. La fonction $\ln$ réalisant une bijection strictement croissante de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, elle possède une application réciproque que l'on nomme fonction exponentielle, notée $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp(x)$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp x) = x$ et $\forall x > 0, \exp(\ln x) = x$
- $\forall x > 0, y > 0, \ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- signe de $\ln(x) : \forall x > 0, \ln(x)$ est $\begin{cases} < 0 \text{ si } x < 1 \\ = 0 \text{ si } x = 1 \\ > 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)$ est $\begin{cases} < 1 \text{ si } x < 0 \\ = 1 \text{ si } x = 0 \\ > 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ et toujours strictement positif.

FIGURE 1 – La fonction $\ln$ et sa réciproque, la fonction $\exp$

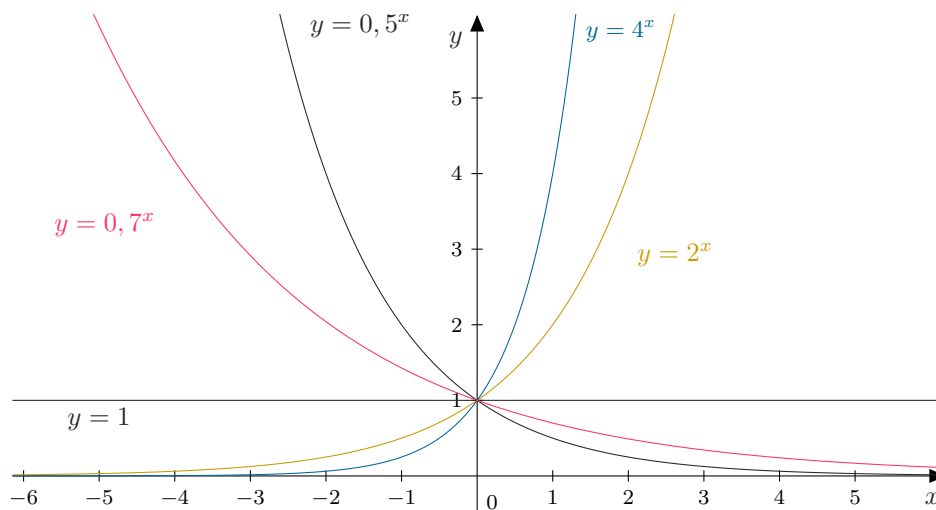


Les fonctions puissances et les autres fonctions exponentielles

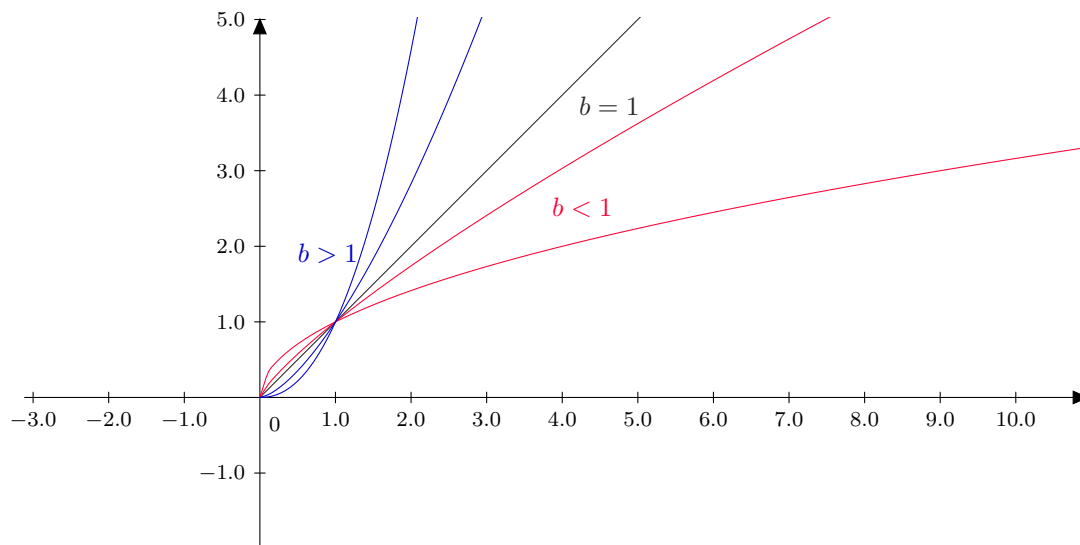
Soit a un réel strictement positif, b un réel, la notation a^b représente le réel $\exp(b \ln(a))$. Vous devez, en général pour travailler sur l'expression a^b , revenir à la forme exponentielle, néanmoins, on définit les fonctions suivantes :

- Pour $a > 0$, $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$. On la nomme "fonction exponentielle de base a ".

FIGURE 2 – Autres fonctions exponentielles



- Pour $b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^b$ sur $]0, +\infty[$. On la nomme "fonction puissance d'exposant b ".

FIGURE 3 – Fonctions puissances d'exposant b 

Formules à retenir : Soit $a, b > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

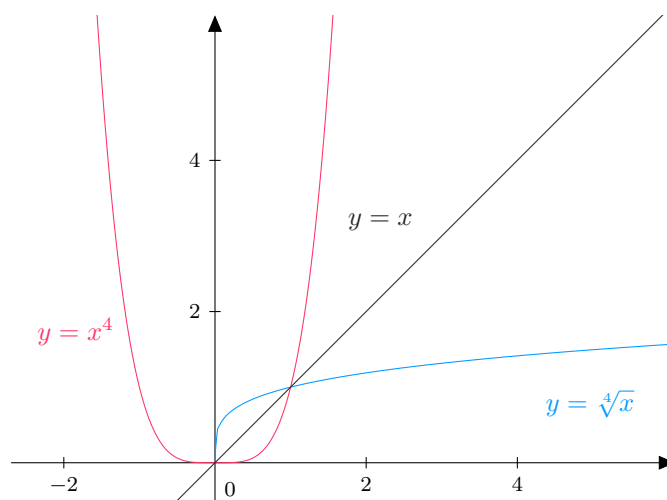
$$\begin{array}{lcl}
 a^{x+y} & = & a^x \cdot a^y \\
 a^{x-y} & = & \frac{a^x}{a^y} \\
 a^x \cdot b^x & = & (ab)^x \\
 \ln(a^x) & = & x \ln(a)
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{lcl}
 a^{-x} & = & \frac{1}{a^x} \\
 (a^x)^y & = & a^{xy} \\
 \frac{a^x}{b^x} & = & \left(\frac{a}{b}\right)^x
 \end{array}
 \right.$$

Les fonctions puissances entières et racines n -ième

• Si n est un entier naturel pair

La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$, réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, de fonction réciproque $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Autrement dit, l'équation $x^n = a$ a deux solutions $x = \pm \sqrt[n]{a}$ si $a > 0$, une solution nulle si $a = 0$ et n'a pas de solution lorsque $a < 0$.

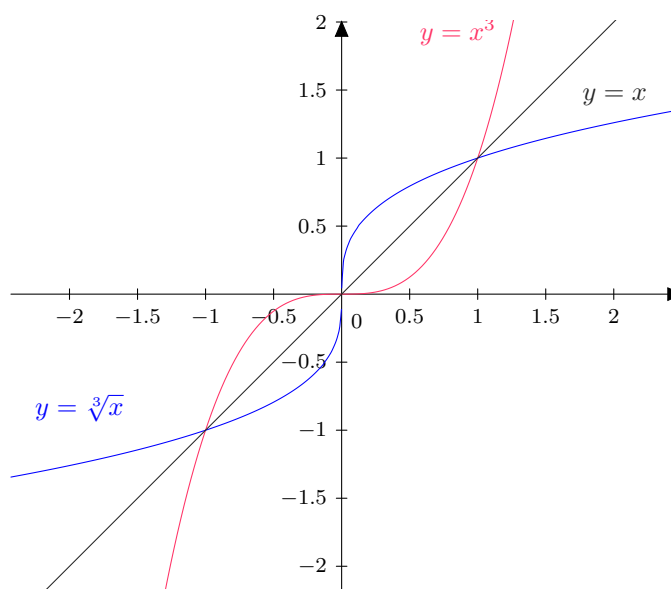
FIGURE 4 – La fonction $x \mapsto x^4$ et la réciproque de sa restriction à $\mathbb{R}^+$ $x \mapsto \sqrt[4]{x}$



• Si n est un entier naturel impair

La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$, réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de fonction réciproque $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Autrement dit, l'équation $x^n = a$ a une unique solutions $x = \sqrt[n]{a}$ ($a \in \mathbb{R}$)

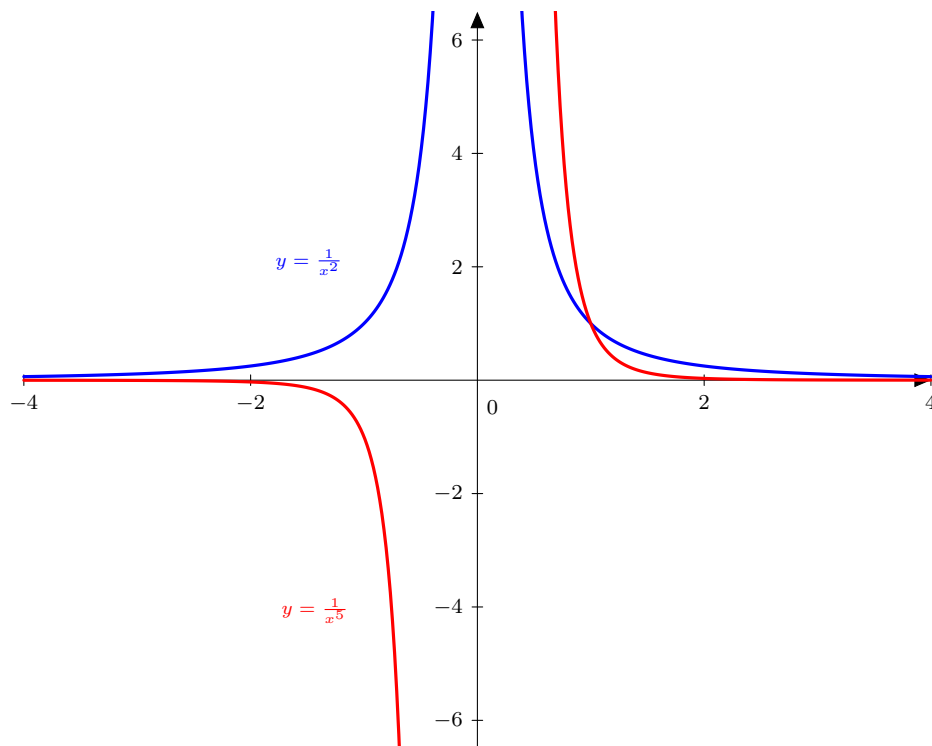
FIGURE 5 – fonction $x \mapsto x^3$ et sa réciproque $x \mapsto \sqrt[3]{x}$



Remarquons pour tout $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Si n est un entier négatif non nul

FIGURE 6 – Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$



Les limites incontournables et les croissances comparées

Récapitulatif des formes indéterminées : " $+\infty - \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{0}{0}$ " et " $\frac{\infty}{\infty}$ "

(on a aussi " 1^∞ ", " 0^0 ")

Croissances comparées

– En plus l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\alpha x))^\beta}{x^\gamma} = 0 \text{ avec } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ et } \gamma > 0$$

– En 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(\alpha x))^\beta x^\gamma = 0 \text{ si } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ et } \gamma > 0$$

– En moins l'infini

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(\beta x) = 0 \text{ avec } n \in \mathbb{N}, \beta > 0$$

Formes indéterminées levées grâce au nombre dérivé d'une fonction

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ (grâce à la dérivée de exp en 0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ (grâce à la dérivée de } x \mapsto \ln(1+x) \text{ en 0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ (grâce à la dérivée de ln en 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (grâce à la dérivée de sin en 0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \text{ (grâce à la dérivée de la fonction tan en 0)}$$

Les Formules de trigonométrie**Valeurs remarquables**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas

Formules remarquables

$$\begin{array}{lll} \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 & \cos(x + \pi) = -\cos(x) & \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) & \sin(x + \pi) = -\sin(x) & \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) & \cos(\pi - x) = -\cos(x) & \\ \tan(-x) = -\tan(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) & \end{array}$$

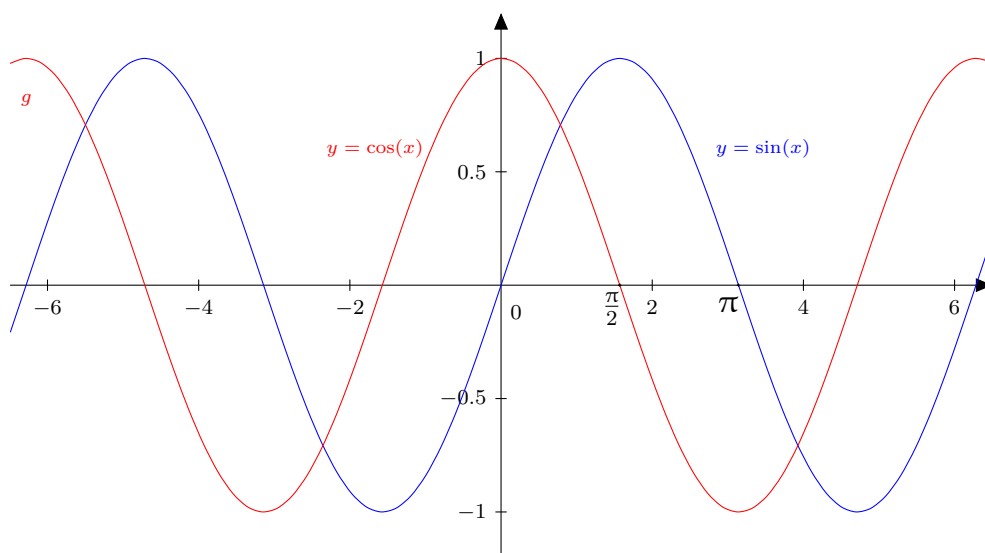
$$\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{array}$$

Formules de duplication :

$$\begin{array}{l} \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \end{array}$$

Les courbes des fonctions circulaires :

FIGURE 7 – Les fonctions sin et cos

Résolution d'équations trigonométriques simples :

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\sin(x) = \sin(a) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi - a + 2k\pi)$.
- $\cos(x) = \cos(a) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, x = -a + 2k\pi)$.
- $\tan(x) = \tan(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + k\pi$ si a appartient à l'ensemble de définition de la fonction tangente.

Les fonctions arcsin et arccos :

- Pour tout réel $s \in [-1, 1]$, il existe un **unique** réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = s$: on l'appelle **arcsinus** de s , noté $\arcsin(s)$.
- Pour tout réel $c \in [-1, 1]$, il existe un **unique** réel $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x) = c$: on l'appelle **arccosinus** de c , noté $\arccos(c)$.

La fonction arctan :

C'est la réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Pour tout x réel :

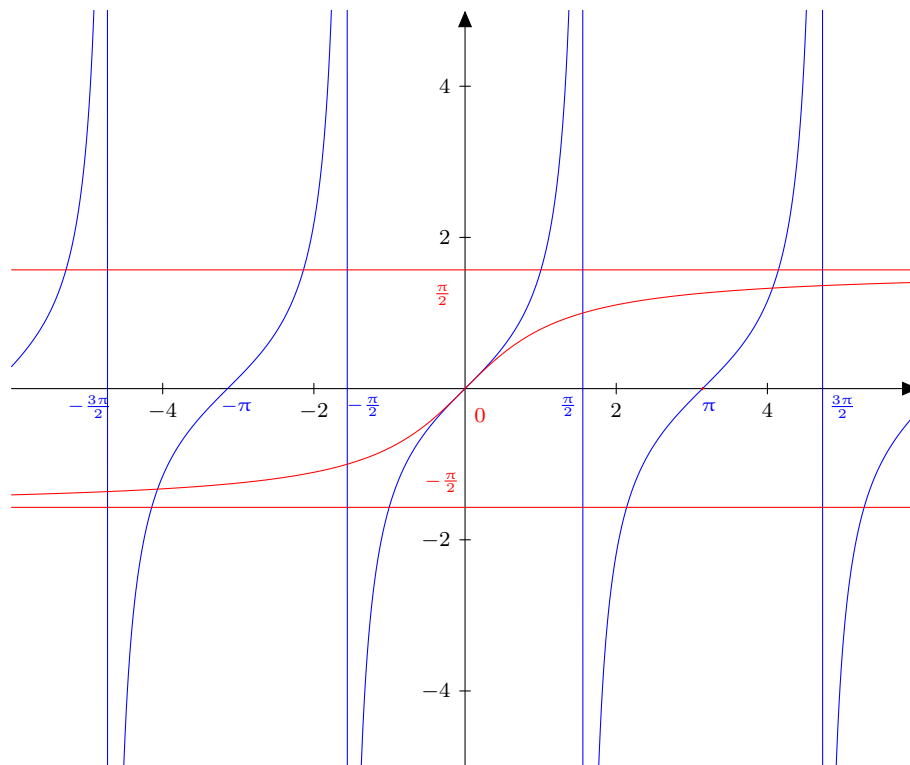
$$y = \arctan(x) \iff \begin{cases} y \in]-\pi/2, \pi/2[\\ \tan(y) = x \end{cases}$$

et pour tout x non nul :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ci-dessous, en bleu la courbe de $\tan$ et ses asymptotes, en rouge la même chose pour $\arctan$.

FIGURE 8 – Les fonctions $\tan$ et $\arctan$



Les dérivées usuelles

Tableau des dérivées de fonctions composées

Sous réserve d'existence :

$f \circ u$	$u' \times f' \circ u$
$u^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$nu' u^{n-1}$
$u^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u' e^u$
$\arctan u$	$\frac{u'}{1 + u^2}$

Les dérivées successives à connaître

Méthode générale de calcul de la dérivée n -ème d'une fonction

- On commence par calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$... jusqu'à conjecturer une formule générale pour $f^{(n)}(x)$ que l'on démontre en effectuant un raisonnement par récurrence.

En utilisant la méthode précédente, on démontre :

$f(x)$	$f^{(p)}(x)$	sur les intervalles
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} & \text{si } p < n \\ n! & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$	$\mathbb{R}$
$x^r, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$	$r(r-1) \cdots (r-p+1)x^{r-p}$	au moins $]0; +\infty[$
$\frac{1}{a+x}$	$\frac{(-1)^p p!}{(a+x)^{p+1}}$	$] -\infty; -a[\text{ et }] -a; +\infty[$
$\sin x$	$\sin(x + p\frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\cos(x + p\frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}$

Les équivalents usuels

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad \tan x \underset{0}{\sim} x \quad \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

- Un polynôme non nul est équivalent au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, à son monôme de plus haut degré et est équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré.

- Une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est équivalente au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ au quotient des termes de plus haut degré et est équivalente en 0 au quotient des termes de plus bas degré.

Les développements limités usuels

La formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I , $x_0 \in I$. On a, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o[(x - x_0)^n]$$

Le cas particulier $x_0 = 0$ est très souvent utilisé :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Développements limités au voisinage de 0
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Conseil : Vous devez connaître par coeur les développements limités usuels à l'ordre 3 ou 4 (c'est à dire , remplacer dans le tableau précédent n par 3 et les écrire) et savoir calculer "techniquement" une somme, un produit de DL et primitiver un DL. Pour une composition de DL, aucune pratique n'est exigible, néanmoins vous devez savoir calculer les DL du type $e^{\sin x}$ ou $\frac{1}{1 + \cos x}$.

Les primitives

Ce tableau fournit des primitives de fonctions sur un intervalle où ces fonctions sont continues

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\int u'(x)(u(x))^n dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + c$ avec $n \in \mathbb{N}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln u(x) + c$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ sur $\mathbb{R}_+^*$	$\int u'(x)(u(x))^\alpha dx = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$ sur $\mathbb{R}$	$\int u'(x)e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + c$
$\int \ln x dx = x \ln x - x + c$ sur $\mathbb{R}_+^*$	$\int u'(x) \ln(u(x)) dx = u(x) \ln(u(x)) - u(x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$ sur $\mathbb{R}$	$\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} dx = \arctan(u(x)) + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$ sur $\mathbb{R}$	$\int u'(x) \cos u(x) dx = \sin u(x) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$ sur $\mathbb{R}$	$\int u'(x) \sin u(x) dx = -\cos u(x) + c$

Remarque Si F est une primitive de f sur I un intervalle, alors

$$\int f(x+a) dx = F(x+a) + c$$

Mais pour $a \neq 0$, $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

Appliquer les formules précédentes pour calculer une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$, puis $x \mapsto \frac{1}{x^3}$.

Les équations différentielles

Equations différentielles à coefficients constants :

✓ **Equation du premier ordre :** $(E) : y' + ay = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

- Si $a = 0$, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = bx + c$ ($c \in \mathbb{R}$)
- Si $a \neq 0$, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$ ($k \in \mathbb{R}$), c'est à dire la somme d'une solution de l'équation homogène ($y' + ay = 0$) et d'une solution particulière $\frac{b}{a}$.

✓ **Equation du second ordre :**

$(E) : y'' + ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ d'équation homogène $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$.

On résout d'abord l'équation homogène (E_H) d'équation caractéristique $(E_C) : r^2 + ar + b = 0$.

Les solutions de (E_H) sont les fonctions s'écrivant sous la forme :

- Si (E_C) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 : $y_H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$t \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$
- Si (E_C) admet une solution unique r_0 : $y_H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$t \longmapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}$$
- Si (E_C) n'admet aucune solution réelle : $y_H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\alpha + i\beta$ est une solution de (E_C) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$t \longmapsto e^{\alpha t} (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))$$

Puis on cherche une solution particulière de (E) :

- Si $b \neq 0$, on cherche une solution constante : $y_P(t) = \frac{c}{b}$.
- Si $b = 0$, on cherche une fonction linéaire $y_P(t) = ut + v$ ((E) devient alors $y'' + ay' = c$, équation du premier ordre à coefficients constants). Deux cas si $a = 0$ ou $a \neq 0$.
- Si $a = 0$ et $b = 0$, (E) devient $y'' = c$ et par intégrations successives, $y_P(t) = c \frac{t^2}{2} + kt + \ell$, avec $k, \ell \in \mathbb{R}$.

Puis on conclut : les fonctions solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$.

Equations différentielles linéaires

✓ **Equation du premier ordre :** $(E) : y' + ay = b$ avec a, b fonctions continues sur I .

Notons, une nouvelle fois, $(E_H) : y' + ay = 0$, l'équation homogène associée.

– On résout (E_H) :

Pour toute solution y_H de (E_H) sur I , il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que,
 $\forall x \in I, y_H(x) = k e^{-A(x)}$, où A désigne une primitive de a sur I .

– On cherche une solution particulière y_P :

On doit observer la nature des fonctions a et b (fonctions trigonométriques, fonctions polynômiales ou exponentielles), on pourra essayer de chercher y_P de la même nature. Sinon, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante :

On définit donc y sur I par $y(x) = k(x) e^{-A(x)}$, où k est dérivable sur I .

Si k est une fonction dérivable sur I , la fonction définie sur I par $y(x) = k(x) e^{-A(x)}$ est solution de l'équation $y' = ay + b$ ssi k est une primitive de $b e^A$ (où A est une primitive de a).

- On conclut : Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_H + y_P$ pour tout y_H solution de (E_H) .

✓ **Equation du second ordre** $(E) : y'' + ay' + b = f$ où a, b sont des réelles et f une fonction continue sur I .

Notons, une nouvelle fois, $(E_H) : y'' + ay' + b = 0$, l'équation homogène associée.

- On résout (E_H) : la forme des solutions y_H a été déjà vue dans le point précédent puisque que l'équation homogène est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
- On cherche une solution particulière y_P :

Rien n'est à connaître, la forme de la solution sera donnée, avec notamment deux cas les plus fréquents :

- * Si $f(t) = P(t)e^{mt}$ où P est une fonction polynôme et $m \in \mathbb{R}$,
on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{mt}$, avec Q fonction polynôme à déterminer, dont le degré sera précisé.
- * Si $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $f(t) = \cos(\omega t)$,
on cherchera une solution particulière sous la forme $y_P(t) = \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ ou $y_P(t) = \lambda t \sin(\omega t) + \mu t \cos(\omega t)$ selon les cas, les constantes λ et μ étant à déterminer.
- On conclut : Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_H + y_P$ pour tout y_H solution de (E_H) .