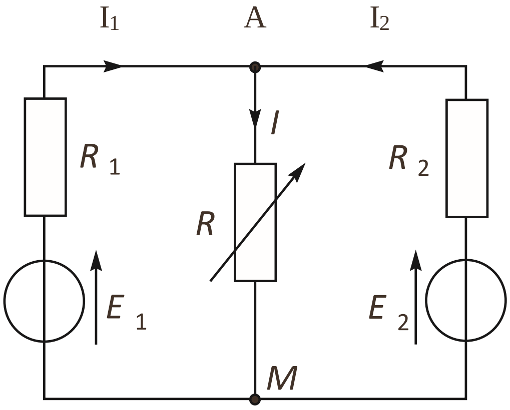
PTSI DS Sciences physiques n°4 27 /01/17

L'usage de la calculatrice N'EST PAS AUTORISE.

<u>EX1</u> Comportement récepteur ou générateur d'un dipôle

On considère le circuit ci-dessous, dans lequel R est une résistance variable.

On cherche à déterminer dans quels cas les dipôles $\{E_1, R_1\}$ et $\{E_2, R_2\}$ se comportent comme des dipôles générateurs ou récepteurs



1) Montrer que :

$$I_1 = \frac{R2\,E1 + R(E1 - E2)}{R1R2 + R(R1+R2)}$$

en appliquant les lois de Kirchhoff .

2) Retrouver ce résultat en appliquant une autre méthode de votre choix.

3) En déduire par symétrie l'expression de I_2.

4) En déduire l'expression de I puis celle de U_{AM}.

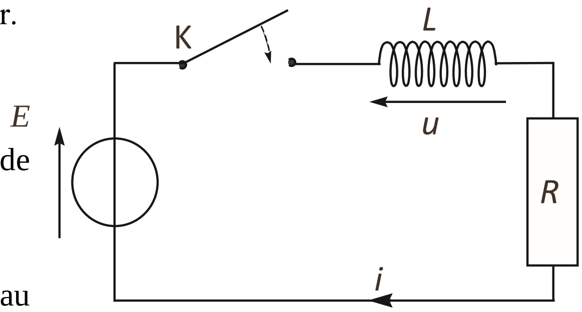
On suppose E_1 et E_2 positives et $E_2 > E_1$

5) A quelle condition sur R le dipôle $\{E_1, R_1\}$ se comporte-t-il comme un récepteur?

6) Que peut-on dire alors du comportement du dipôle $\{E_2, R_2\}$?

<u>EX2</u> Circuit RL série

On considère le circuit ci-contre. A $t = 0$ on ferme l'interrupteur.



1) Déterminer $i(0^-)$ valeur de l'intensité i juste avant la fermeture.

2) Déterminer $u(0^+)$ valeur de la tension u et $i(0^+)$ valeur de l'intensité i juste après la fermeture.

3) Déterminer $u(\infty)$ valeur de la tension u et $i(\infty)$ valeur de i au bout d'un temps très long.

4) On pose $\tau = \frac{L}{R}$. Quelle est l'unité de τ dans le système international? Démontrer le résultat. Quel est le nom donné à cette constante?

5) Etablir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

6) Trouver à partir de cette expression la valeur de $i(\infty)$. Vérifier que cette valeur correspond au comportement prévu dans la question 3).

7) Tracer l'allure de la courbe représentative de l'intensité $i(t)$ en précisant son asymptote. Calculer la valeur de la pente de la courbe à $t = 0^+$. Tracer la tangente à l'origine et calculer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote.

8) Déterminer, en fonction de τ, l'expression du temps t_1, au bout duquel 99% de la charge a été effectuée. *On donne : ln(10) $\simeq$ 2,3.*

9) Déterminer l'expression de $u(t)$.

10) Etablir pour ce circuit le bilan de puissance à l'instant t.

11) Lorsque le régime permanent est établi, exprimer l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine en fonction de L, E et R, la puissance dissipée par effet Joule en fonction de E et R.

12) Lorsque le régime permanent est établi, que devient l'énergie électrique fournie au circuit par le générateur?

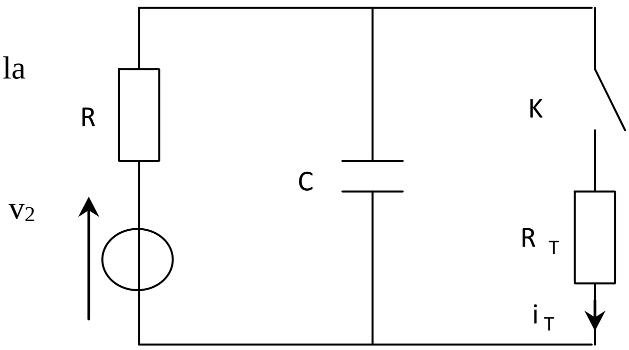
<u>EX3</u> Un gaz de tube à décharge n'est a priori pas conducteur.

Cependant, lorsqu'une très haute tension est appliquée entre deux de ses électrodes, l'ionisation des atomes (xénon par exemple) qui en résulte abaisse la résistance du tube qui devient alors équivalent à un conducteur de résistance R_T dans lequel le condensateur C peut se décharger.

1)Expliquer pourquoi l'ionisation des atomes de xénon abaisse la résistance du tube à décharge.

On utilise le circuit équivalent de la figure pour expliquer la formation d'un éclair dans le tube.

On considère que la tension v_2 est de0,30 kV.



2) Le régime permanent étant atteint pour t < 0, on ferme l'interrupteur K à l'instant t = 0. Déterminer les expressions $i_T(0_+)$ et $i_T(\infty)$ de i_T juste après la fermeture de l'interrupteur et lorsque le régime permanent est atteint (après la fermeture de l'interrupteur).

3) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i_T(t)$ pour t > 0. On pourra y faire apparaître la constante de temps $\tau = \frac{RR_TC}{R+R_T}$.

4) En déduire l'expression complète de $i_T(t)$ pour t > 0 en fonction de v_2, R, R_T, t et τ.

5) Tracer l'allure de $i_T(t)$ pour t < 0 et t > 0 et expliquer la génération d'un éclair lors de la fermeture de l'interrupteur K.

<u>EX4</u> Oscillateur amorti

On considère un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre $\omega_0 = 100$ *rad.s*$^{-1}$ et de facteur de qualité Q = 10; la masse m = 100 g de cet oscillateur est lâchée avec un écart à la position d'équilibre de x_0 = 10 cm sans vitesse initiale.

1) Calculer : a) la pseudo-période; b) le décrément logarithmique; c) l'amplitude des oscillations au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes; d) l'énergie mécanique initiale; e) l'énergie mécanique au bout de 2 puis 5 puis 10 pseudo-périodes.
2) Déterminer le nombre de pseudo-périodes au bout desquelles l'amplitude des oscillations est divisée par 17.

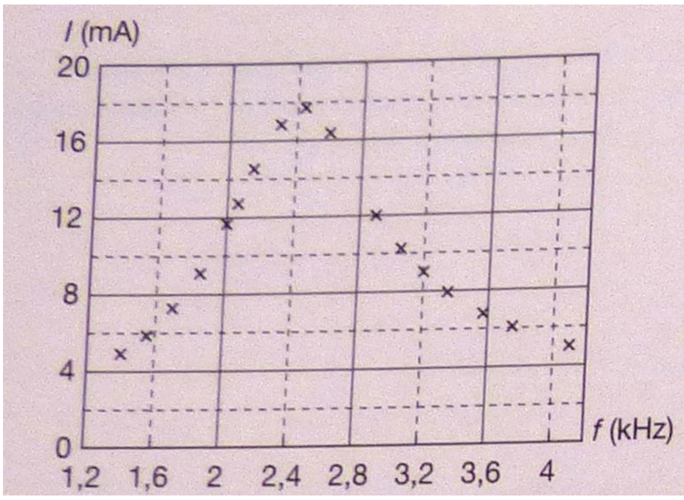
EX5 Soit le circuit constitué d'un condensateur de capacité C en série avec l'association dérivation :{résistance R et bobine d'inductance L } . L'ensemble est alimenté par un générateur imposant la tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$

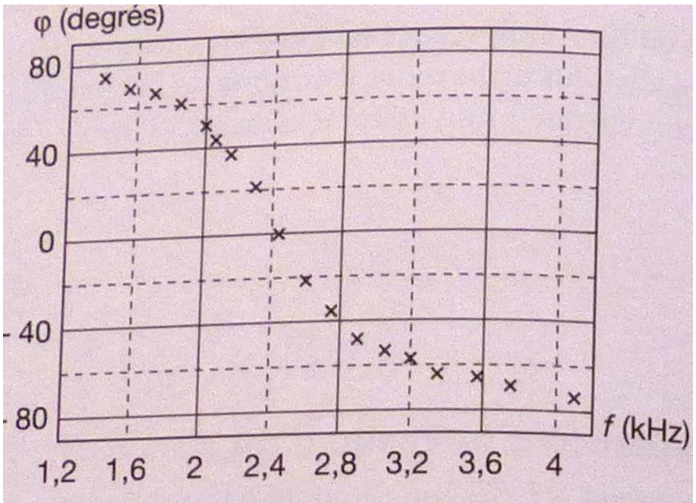
1.Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i_R , l'intensité traversant la résistance (préciser clairement les notations utilisées) par les lois de Kirchhoff.

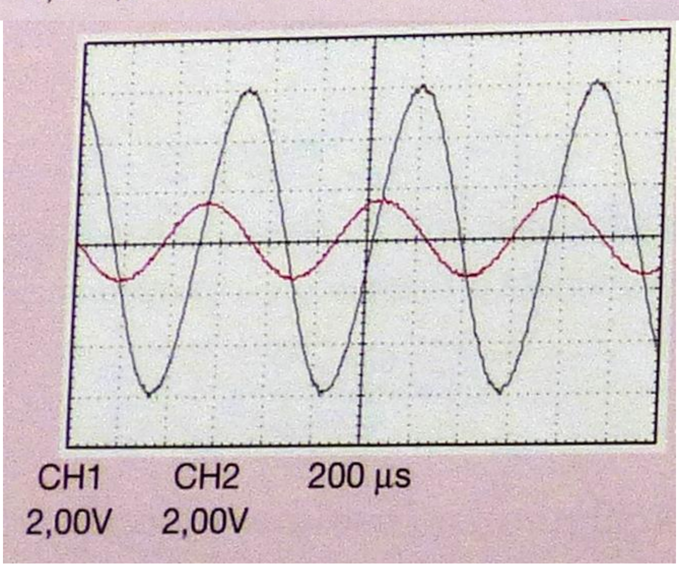
2.Déterminer la solution de cette équation en régime permanent en utilisant la méthode complexe .Donner l'amplitude I_{Rm} et la phase ϕ_R de i_R. Est-il possible que i_R ne dépende pas de R ?Pour quelles valeurs de I_{Rm} et de ϕ_R ? Retrouver l'expression de l'amplitude complexe de i_R ($\underline{I_R}$) en utilisant l'équivalence Thévenin /Norton en complexes.

EX6 Détermination des paramètres d'un circuit RLC série

Un circuit RLC série est alimenté par une source $e(t) = e_0 \cos \omega t$, e_0 restant constante.
On note I la mesure de l'intensité affichée sur un ampèremètre lorsque la fréquence f du générateur varie , la courbe obtenue est ci-jointe . On précise que le maximum est atteint exactement au point indiqué. Un oscilloscope en bicourbe donne accès au déphasage φ de l'intensité i par rapport à la tension e . (cf courbe de φ) . enfin , on a reproduit les tensions e aux bornes du générateur et u aux bornes de la résistance (cf oscillogramme bicourbe)







1.Résultats théoriques

a)Donner en notation complexe l'expression du courant $\underline{i}$ dans le circuit en fonction de $\underline{e}$, tension du générateur,R,L,C et ω.

b)Exprimer l'amplitude i_0 de i en fonction de e_0 , R,L,C et ω

c)Exprimer la pulsation de résonance d'intensité ω_r , les pulsations de coupure ω_{C1} et ω_{C2} ainsi que la bande passante $\Delta\omega$ en fonction des paramètres du circuit.

d)Exprimer $\tan \varphi$ en fonction de ω, R,L,C.

2.<u>Exploitation des courbes</u>

a)Faire le schéma du montage à réaliser pour obtenir l'oscillogramme donné. Identifier u(t) et e(t).Retrouver l'un des points de la courbe de φ

b)Que vaut ω_r ?

c)Evaluer le plus simplement possible la valeur de R.

d)Comment évaluer ω_{C1} , ω_{C2} , et Q le facteur de qualité ? Comment en déduire L ?

DS4 Corr

EX1 Voir exo d'application traité en fin de cours (chap 5)

2)Théorème de Millmann , ou conversion source de Thévenin <-> source de Norton

3) $I_2=\frac{R1E2+R(E2-E1)}{R1R2+R(R1+R2)}$ 4) $I=I_1+I_2 = \frac{R1E2+R2E1}{R1R2+R(R1+R2)}$

5) $I_1<0$ ssi $R_2E_1+R(E_1-E_2)<0$ soit $R>\frac{R2E1}{E2-E1}$

6)$I_2>0$ dans tous les cas dc il se comporte comme une générateur.

EX2 Voir cours

12) L'énergie électrique fournie par le circuit est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

EX3 1)Libération d'e- càd de porteurs de charges d'où passage d'un courant possible et cela d'autant plus facilement que ce nombre est plus élevé (i augmente pour u fixée càd R diminue)

2) Nommons i le courant dans la branche principale sens horaire, i_C celui dans la branche du condensateur (vers le bas) u_T la tension aux bornes du tube càd de R_T et u_c la tension aux bornes du condensateur (pour ces 2 tensions : en convention récepteur càd flèches orientées vers le haut) .Evidemment les sens et conventions sont arbitraires mais une fois choisis , il faut s'y tenir !

A $t=0^-$,$u_C(0^-)=V_2=$,$u_C(0^+)$ par continuité de la charge portée par un condensateur

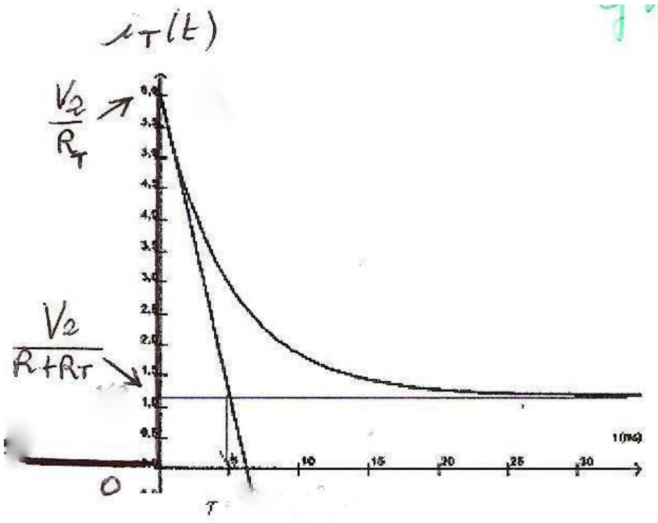
<u>Méthode 1 (pour 2) et 3)</u> : on écrit les lois de Kirchhoff : $V_2-Ri = u_C=R_T\, i_T$; $i=i_C + i_T$; $i_C = C\frac{du_C}{dt}$

Dc $i_T(0^+) =\frac{uC(0+)}{R_T} = \frac{V_2}{R_T}$; et $i_T(\infty) = - i_C(\infty)+i(\infty) = 0 + i(\infty)$ car en RP $i_C =\frac{dq}{dt}$ =0 en nommant q la charge de l'armature sup ; dc $i_T(\infty) =\frac{V_2}{R+R_T}$

<u>Méthode 2 (pour 2) et 3)</u> : On transforme le générateur de Thévenin à gauche en géné de Norton , on englobe R_T pour revenir ensuite à un modèle de Thévenin , pour se retrouver dans le cas classique du cours ; décharge d'un condensateur dans circuit RC série.

3) $V_2=R_T\, i_T +R(i_C + i_T) =(R_T +R)\, i_T +RCR_T\frac{di_T}{dt}$ dc l'équa diff $\boldsymbol{\frac{di_T}{dt}} + \boldsymbol{\frac{i_T}{\tau}} = \boldsymbol{\frac{V_2}{RCR_T}}$

4) solutions $i_T = A.e^{-t/\tau} + \frac{V_2}{R+R_T}$ on retrouve bien $i_T(\infty) = \ldots$



A se trouve d'après la CI : $i_T(0^+) = \frac{V_2}{R_T} = A.1 + \frac{V_2}{R+R_T}$ dc $A = \frac{V_2}{R_T} - \frac{V_2}{R+R_T} = \frac{RV_2}{R_T(R+R_T)}$ dc

$$\mathbf{i_T = \frac{V_2}{R+R_T}\left(1 + \frac{R}{R_T}e^{-t/\tau}\right)}$$

5) i_T est discontinue dc $u_{tube} = R_T\, i_T$ aussi ! la surtension permet au gaz d'être conducteur et d'émettre un flash (dès que K est fermé , $u_{tube} = V_2 = 300$ V , ce qui rend le tube conducteur dc assimilable à une résistance R_T).

<u>EX4</u> a)x étant l'élongation , x obéit à l'équa diff : $\ddot{x} + \dot{x}\frac{\omega 0}{Q} + \omega_0^2 x = 0$ avec

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, d'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega 0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$, on a le discriminant $\Delta = (\frac{\omega 0}{Q})^2 - 4\,\omega_0^2$ et les solutions $r = -\frac{\omega 0}{2Q} \pm j\sqrt{-\Delta}/2 = -\frac{\omega 0}{2Q} \pm j\sqrt{-\left(\frac{\omega 0}{Q}\right)^2 + 4\,\omega 0^2}\;/2 = -\frac{1}{\tau} \pm j\,\omega$

avec $\tau = \frac{2Q}{\omega 0}$ et $\omega = \frac{\sqrt{4\omega 0^2 - \left(\frac{\omega 0}{Q}\right)^2}}{2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4Q^2}\right)}$

la solution en régime pseudopériodique est $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\,.\,e^{-t/\tau}$

$\omega = 100\,.\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4.10^2}\right)}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ = <u>6,29 .10 $^{-2}$ s =62,9ms</u> (attention au nombres de c.s.)
Rq :T_0 =<u>6,28 .10 $^{-2}$ s</u>

b) $\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x(t)}{x(t+nT)}$ ou encore $\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)}$ soit ici $\delta = \ln\frac{A\cos(\omega t + \phi)\,.e^{-t/\tau}}{A\cos(\omega(t+T) + \phi)\,.e^{-(t+T)/\tau}} =$ $\ln\frac{e^{-t/\tau}}{e^{-(t+T)/\tau}} = \ln(e^{T/\tau}) = \frac{T}{\tau} = \frac{T\omega 0}{2Q}$ <u>= 0,3145</u> $(\approx\frac{\pi}{Q})$

c)On a $e^{\delta} = \frac{x(t)}{x(t+T)}$ donc $x(t+T) = \frac{x(t)}{e^{\delta}}$ et au bout de n périodes : $x(t+nT) = \frac{x(t)}{e^{n\delta}}$ avec $\delta = \frac{T}{\tau}$

On obtient donc au bout de 2T : x=<u>5,23cm</u> ……….. au bout de 5T : x=<u>2,07cm</u> ……….. au bout de 10T : x=<u>0,429cm</u>

d) $E_{m,0} = E_{c,0} + E_{pe,0} = 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\,\omega_0^2 x_0^2$ <u>= 5,0 J</u>

L'énergie mécanique E_m se calcule par $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2$ x_m étant l'amplitude à chaque instant (qui décroît)

On utilise donc les valeurs du c) : au bout de 2T , E_m = <u>1,42J</u> , …….. au bout de 10T , E_m = <u>9,2mJ</u>

2) On cherche l'entier n tel que $x(t+nT) = \frac{x(t)}{e^{n\delta}} = \frac{x(t)}{17}$ soit $e^{n\delta} = 17$ soit encore $n = \frac{\ln 17}{\delta} = 9{,}02$ .Donc <u>n=9</u>

<u>EX5 :</u> 1)**<u>Méthode 1(avec les grandeurs réelles)</u>**Faire le schéma du circuit , nommer les courant , par ex i_C dans la branche principale , i_R et i_L dans les branches dérivées , $u_L = u_R$ la tension aux bornes de R càd aussi L , en convention récepteur

Les lois : $u_C + u_R = e$ (1) ; $i_C = i_R + i_L$; $u_R = Ri_R = u_L = L\frac{di_L}{dt}$ or $i_C = C\frac{du_C}{dt}$

On voit qu'il faut dériver (1) une fois pour faire apparaître $\frac{du_C}{dt}$ et dc ensuite i_C puis i_R par la loi des nœuds .On obtient : $\frac{du_C}{dt} + \frac{du_R}{dt} = \frac{de}{dt}$ soit $\frac{i_C}{C} + R\frac{di_R}{dt} = \frac{de}{dt}$

En utilisant la loi des nœuds : $\frac{i_R}{C} + \frac{i_L}{C} + R\frac{di_R}{dt} = \frac{de}{dt}$; maintenant , il reste i_L ,or on voudrait $\frac{di_L}{dt}$ pour faire apparaître i_R , dc on dérive une deuxième fois :

$\frac{1}{C}\frac{di_R}{dt} + \frac{1}{C}\frac{di_L}{dt} + R\frac{d^2i_R}{dt^2} = \frac{d^2e}{dt^2}$ soit $\frac{1}{C}\frac{di_R}{dt} + \frac{R}{LC} i_R + R\frac{d^2i_R}{dt^2} = \frac{d^2e}{dt^2}$ soit

$$\boldsymbol{\frac{d^2i_R}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_R}{dt} + \frac{1}{LC}i_R = \frac{1}{R}\frac{d^2e}{dt^2}}$$

<u>Méthode 2(avec les grandeurs complexes) ;voir 2)</u>

2) on associe aux grandeurs réelles ………….. les grandeurs complexes :

$i_R(t) = I_{Rm}\cos(\omega t + \phi_{iR})$ = ……….. on lui associe $\underline{i_R} = I_{Rm}\, e^{j(\omega t + \phi iR)}$ avec $i_R(t) = \mathrm{Re}(\underline{I_R}\, .e^{j\omega t})$ et $\underline{I_R} = I_{Rm}\, e^{j\,\phi iR}$

$e(t) = E_m.\cos\omega t$ = ……………. ……… on lui associe $\underline{e} = E_m.\, e^{j\omega t}$ avec $e(t) = \mathrm{Re}(\underline{E}\, .e^{j\omega t})$ et $\underline{E} = E_m$

l'équa diff en grandeurs complexes s'écrit :

$\frac{d^2\underline{i_R}}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{d\underline{i_R}}{dt} + \frac{1}{LC}\underline{i_R} = \frac{d^2\underline{e}}{Rdt^2}$ soit aussi $\frac{d^2\underline{I_R}}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{d\underline{I_R}}{dt} + \frac{1}{LC}\underline{I_R} = \frac{d^2\underline{E}}{Rdt^2}$ en simplifiant par $e^{j\omega t}$

or $\frac{d^2\underline{I_R}}{dt^2} = (j\omega)^2\,\underline{I_R}$ et $\frac{d\underline{I_R}}{dt} = j\omega\,\underline{I_R}$ et $\frac{d^2\underline{E}}{dt^2} = (j\omega)^2\,\underline{E}$ donc l'équation devient : $\underline{I_R}\left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = -\omega^2\frac{\underline{E}}{R}$

on posera $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et on a $\underline{E} = E_m$

dc $\underline{I_R} = \frac{-LC\omega^2\, Em}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} = \frac{-\omega^2\, Em}{R(\omega 0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega}{C}}$

d'où le module $I_{Rm} = |\,\underline{I_R}\,| = \frac{\omega^2\, Em}{R}.\frac{1}{\sqrt{(\omega 0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{RC})^2}}$

et l'argument $\phi_{iR} = \pi$- arg$((\omega 0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega}{RC})$ = π - arctan $(\frac{\omega}{RC(\omega 0^2 - \omega^2)})$ + π éventuellement selon le positionnement de ω par rapport à ω_0.

$\underline{I_R}$ (donc aussi i_R) ne dépend pas de R ssi $R(1 - LC\omega^2)$ =0 càd $1 - LC\omega^2$ =0 soit pour $\omega = \omega_0$ alors $I_{Rm} = C\,\omega_0\,E_m$ et $\phi_{iR} = \pi/2$

Méthode 2 (avec les grandeurs complexes) Retrouvons l'expression de $\underline{I_R}$ de manière directe sans passer par les grandeurs réelles :

(faire les schémas ..) on remplace le générateur de tension $\underline{E}$ en série avec C par l'association { générateur de courant $\boldsymbol{jC}\omega\,\underline{E}$ en // avec impédance $\frac{1}{jC\omega}$ } puis on réunit la bobine et le condensateur en dérivation pour former $\underline{Z_{LC}}$

On peut ensuite utiliser la formule du diviseur de courant (ou bien repasser ne modèle de Thévenin $\boldsymbol{jC}\omega\,\underline{E}$ en // avec $\underline{Z_{LC}} = \ldots = \frac{jL\omega}{(1-LC\omega^2)}$)

Cela donne $\underline{I_R} = (\frac{\underline{Z_{LC}}}{R+\underline{Z_{LC}}})\ \boldsymbol{jC}\omega\,\underline{E} = \ldots = = \frac{-LC\omega^2\,\mathrm{Em}}{R(1-LC\omega^2)+jL\omega}$

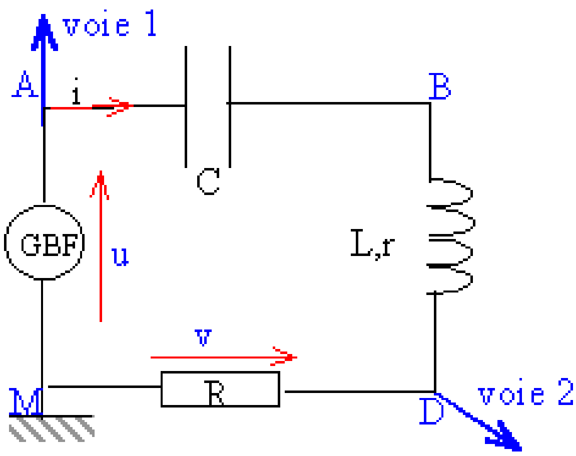
EX6

1)a) $\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{e}}{R+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}$ b) $i_0 = |\underline{i}| = \frac{e_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$

c) $\omega_r = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ pour le maximum de I et Imax vaut alors Imax $=\frac{e_0}{R}$

ω_{C1} et ω_{C2} sont telles que I= Imax/$\sqrt{2}$ …. Soit $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm$ R (…cours , on trouve alors , après avoir résolu les 2 équations du 2nd d° en ω et gardé les racines >0 :

$\omega_{C2,1} = \frac{\pm RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}$ avec $\Delta = R^2C^2 + 4LC$ dc la bande passante est $\Delta\omega = \frac{R}{L}$



d) $\frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{i_0}{e_0}$ e $^{j\varphi}$ dc φ= arg $(\frac{\underline{i}}{\underline{e}})$ = - arg $\underline{Z}$

tan φ = - $(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega})$

2)a) Les masses des 2 tensions à visualiser doivent être communes.

Soit u_0 l'amplitude de u , tension aux bornes de R ,
$u_0 = R\,i_0$ or i_0 max vaut $\frac{e_0}{R}$ (cf 1)b) et ceci se produit à la résonance d'intensité pour $\omega = \omega_r = \omega_0$)
donc $u_0 \le e_0$ donc , les calibres sur les 2 voies étant identiques , la grande courbe est e(t)
Mesure du déphasage φ de i (donc u =Ri) par rapport à e :

$T=7.10^{-4}$ s ; $\tau = 1{,}4.10^{-4}$ s donc $\varphi = 2\pi.\ 1{,}4/7 = 1{,}25$ rad $=72°$pour f=1/T=1,4 kHz ; c'est conforme à la courbe.

b)D'après la courbe de résonance , f_R =2,4 kHz dc $\omega_r = 15.10^3$ rad/s

c)D'après a) $u_0 = R\ i_0$, mais on ne peut faire le calcul à ω quelconque puisqu'on ne connaît pas L ni C donc Z , sauf à la résonance ;

la courbe de I (efficace) donne à la résonance :I=18mA dc $i_0 = I\sqrt{2}$ = 25mA

et u_0 =6,0V d'après l'oscillogramme , dc **R= 240Ω**

d)D'après la courbe de résonance , en divisant le max de I par $\sqrt{2}$: 13 mA dc

f_{C1} =2,1 kHz et f_{C2} =2,8 kHz puis $\omega_{C1} \approx 13$krad/s et $\omega_{C2} \approx 18$ krad/s

$Q=\frac{\omega_C}{\Delta\omega} \approx \frac{15}{5} = 3$ puis comme $\Delta\omega = \frac{R}{L}$ $= 5.10^{3}$ (cf 1)c)) on en déduit L par $L=\frac{R}{\Delta\omega}$=50mH