

**EXI : MICROSCOPIE EN CHAMP PROCHE ( d'après concours e3a 2016)**

La microscopie en champ proche tire profit de phénomènes physiques qui ont un effet notable sur des gammes de distances inférieures au micromètre. Il est ici proposé l'étude de deux instruments permettant d'imager des surfaces avec une résolution inférieure à 10 nm : le microscope à force atomique (AFM pour Atomic Force Microscope) et le microscope à effet tunnel (STM pour Scanning Tunneling Microscope).

**Données :**

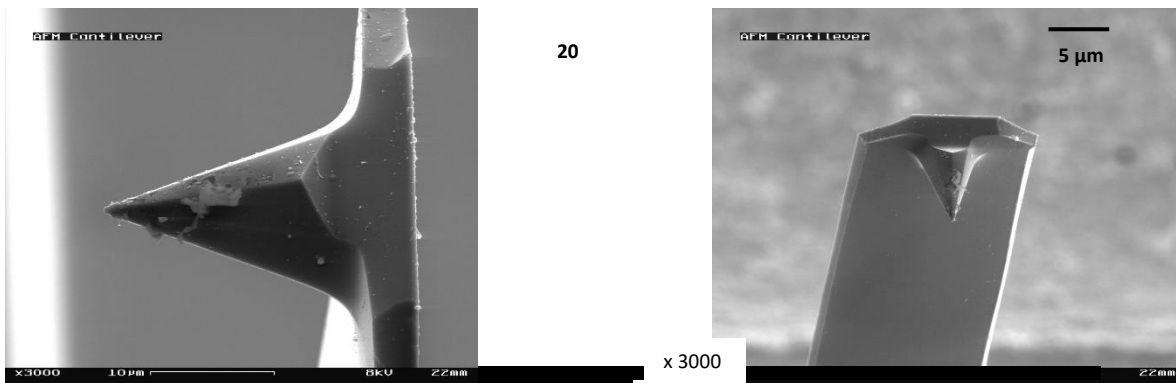
- Rayon de Bohr :  $a_0 = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
- Masse de l'électron  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante de Planck réduite  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- Charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Electronvolt :  $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- Nombre volumique d'atomes de silicium dans la pointe de l'AFM :  $\rho = 5,0 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$
- Module d'Young du silicium :  $E = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ U.S.I.}$

Première partie  
**AFM EN MODE OSCILLANT**

La sonde de mesure d'un AFM est principalement constituée d'un levier de dimensions micrométriques au bout duquel est fixée une pointe de forme conique. Cette pointe entre en interaction via les forces de Van der Waals avec les surfaces que l'on cherche à imager. La distance pointe-surface est de l'ordre de quelques nanomètres. Le mode oscillant permet, sans contact avec l'échantillon et donc sans risque de l'endommager, de mesurer le gradient de la force d'interaction entre la pointe et l'échantillon.

**A. Étude documentaire**

Les photographies de la figure 1 représentent la pointe d'un microscope à force atomique. Elles ont été obtenues avec un microscope électronique à balayage (MEB). Au lieu d'être éclairés par de la lumière visible, comme c'est le cas dans un microscope optique traditionnel, les objets sont « éclairés » avec des électrons préalablement accélérés, avec une énergie cinétique  $E_C \approx 5.0 \text{ keV}$ .

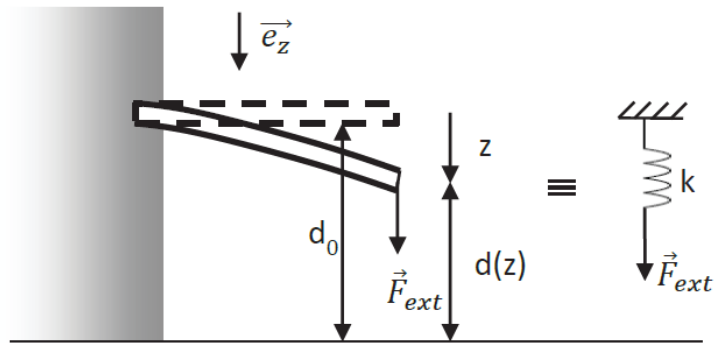


**Figure 1.** Images MEB d'une pointe AFM

- A1.** Évaluer la largeur et la hauteur de la pointe AFM ainsi que la largeur et l'épaisseur du levier.  
**A2.** Quelle est selon vous l'information qui figure dans l'encart blanc en bas à gauche des images sous la forme « x... » ? Comparer aux microscopes optiques « traditionnels ».  
**A3.** Expliquer de manière qualitative pourquoi on ne peut pas obtenir cette image avec un microscope optique traditionnel ?  
**A4.** Rappeler la définition de la longueur d'onde de De Broglie des électrons incidents.  
**A5.** En déduire son expression en fonction de l'énergie cinétique  $E_C$  des électrons et calculer sa valeur.  
**A6.** Montrer que ce dispositif permet bien de dépasser les limitations du microscope optique.

**B. Système pointe-levier**

La pointe du microscope se situe sous un levier parallélépipédique de longueur  $L$ , de largeur  $a$  et d'épaisseur  $e$  encastré horizontalement dans une paroi. Au repos, le système levier-pointe, de masse  $m$ , est horizontal, à la hauteur  $d_0$  de l'échantillon (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale  $\vec{F}_{ext}$  (on supposera que la force reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre du système, celui-ci est déformé. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance  $z$  que l'on appelle la flèche (voir figure 2 ci-dessous) et se trouve alors à une distance  $d(z)$  de l'échantillon.



**Figure 2.** Système encastré dans une paroi et modèle

La flèche  $z$  est donnée par la relation suivante :  $z = \frac{4L^3}{Eae^3} \cdot F_{ext}$  où  $E$  est appelé module d'Young du matériau constituant le levier et la pointe et  $F_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{e}_z$ .

**B1.** Quelle est la dimension du module d'Young  $E$  ?

**B2.** En se plaçant à l'équilibre, montrer que l'on peut modéliser le système par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur  $k$  dont on donnera l'expression analytique en fonction de  $E$ ,  $a$ ,  $L$  et  $e$ .  
 $k = 20 \text{ USI}$  pour une fibre de longueur  $L = 2,0 \cdot 10^2 \mu\text{m}$ , de largeur  $a = 50 \mu\text{m}$  et d'épaisseur  $e = 5,0 \mu\text{m}$ .

Ici, on ne considère pas les forces d'interactions entre la pointe et l'échantillon. Le levier et la pointe sont seuls. Le déplacement d'une céramique piézoélectrique, soumet le système pointe-levier à une force excitatrice  $\vec{F}_{ext} = F_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$ . De plus, le système est soumis à une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse, de coefficient  $\alpha$  et à la force de rappel du ressort. On note  $z$  l'écart à la position d'équilibre.

**B3.** En déduire l'équation de la dynamique du mouvement du système pointe – levier :

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = A \cos(\omega t)$$

Donner les expressions littérales de la pulsation propre  $\omega_0$  et des facteurs  $\gamma$  et  $A$ .

**B4.** En déduire l'expression du facteur de qualité  $Q$ .

On note  $\underline{z}(t) = \underline{Z}_0 \exp(j\omega t)$  la solution particulière de l'équation différentielle en grandeurs complexes associée à celle obtenue en **B3**.

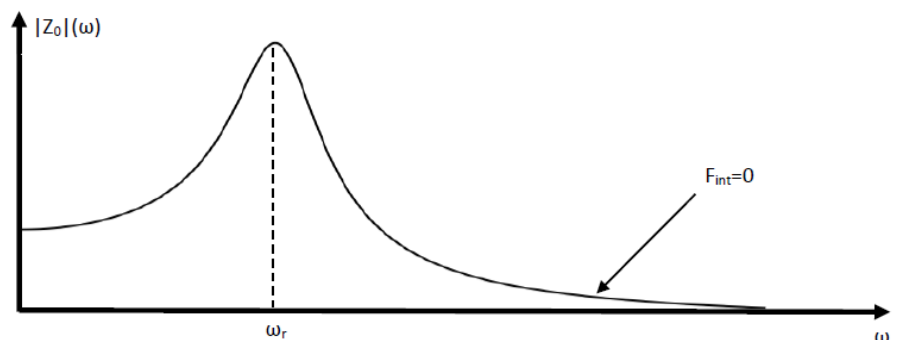
**B5.** En déduire l'expression de l'amplitude complexe d'oscillation  $\underline{Z}_0$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .

**B6.** Exprimer son module en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $A$  et  $Q$

**B7.** En déduire l'expression de la pulsation de résonance  $\omega_r$  en fonction de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$ . A quelle condition sur le facteur de qualité la résonance existe-t-elle ?

**B8.** Sur la figure est représentée l'amplitude  $Z_0$  des oscillations dans le cas où il y a résonance. Représenter, sur ce graphique, l'allure de l'amplitude  $Z_0$  des oscillations dans le cas où il n'y a pas résonance. Faire apparaître la valeur atteinte par  $Z_0$  en basse fréquence.

Résonance de l'amplitude des oscillations en fonction de la pulsation.



L'objectif de cette deuxième partie est de décrire les interactions entre la pointe AFM et l'échantillon. Celles-ci sont dues aux forces de Van der Waals.

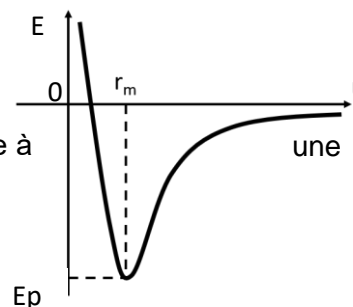
### C. Approche qualitative

**C1.** Ces forces sont conservatives : rappeler ce que cela signifie et exprimer l'énergie potentielle d'interaction entre 2 charges  $q$  et  $q'$  distantes de  $r$ .

Le profil de l'énergie potentielle d'interaction  $E_p(r)$  entre la pointe et l'échantillon espacés d'une distance  $r$  est représenté ci-contre.

**C2.** Distinguer, sur la figure, deux gammes de distances : l'une pour laquelle l'interaction est répulsive et l'autre pour laquelle elle est attractive. Justifier.

**C3.** Quelle énergie faut-il apporter au système à l'équilibre pour éloigner la pointe à distance macroscopique (i.e. à l'infini) ? Justifier.



## Troisième partie : CHIMIE DE LA POINTE AFM

L'AFM peut être utilisé selon deux modes distincts. Le mode « non contact » et le mode « contact » qui consiste à utiliser les forces répulsives : la pointe appuie sur la surface, elle est donc repoussée, et le levier est dévié. La rétroaction s'effectue sur la mesure de la direction de la déviation. Le but est de comparer les propriétés du silicium et du nitrure de silicium  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , deux matériaux durs, afin d'affecter à chacun de ces matériaux un mode d'utilisation.

### Données thermodynamiques :

Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6.10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Température de fusion du silicium sous 1 bar :  $T_{\text{fus}}(\text{Si}) = 1687 \text{ K}$

### Données spécifiques :

Masse volumique du silicium :  $\rho = 2,3.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Masse molaire du silicium :  $M = 28, \text{ g.mol}^{-1}$

Rayon de l'ion nitrure  $\text{N}^{3-}$  :  $r(\text{N}^{3-}) = 140 \text{ pm}$

Rayons de l'ion  $\text{Si}^{4+}$  :  $r(\text{Si}^{4+}) = 27 \text{ pm}$  (si coordinence = 4) ou  $40 \text{ pm}$  (si coordinence = 6)

Énergie de liaison Si-Si :  $D_{\text{Si-Si}} = 225 \text{ kJ.mol}^{-1}$

Électronégativité :  $\chi(\text{N})=3,04$   $\chi(\text{Si})=1,90$

**Aide au calcul :**  $\frac{28}{6 \times 2.3} \approx 2$  ;  $\frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.2$  ;  $\sqrt{2} \approx 1,4$  ;  $\sqrt{3} \approx 1,6$  ;  $\sqrt[3]{160} \approx 5,4$  ;  $\sqrt{1,5} \approx 1,2$  ;  $\frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0,68$

### D. Structure du silicium

**D1.** Écrire la configuration électronique à l'état fondamental de l'atome de silicium Si ( $Z=14$ ). Préciser ses électrons de cœur et de valence.

**D2.** En déduire sa position dans la classification périodique de Mendeleïev (numéro de période ; numéro de colonne). Citer un élément chimique très répandu qui possède la même configuration de valence. Quel sera l'élément le plus électro-négatif des deux ? Justifier.

**D3.** Le silicium intervient naturellement dans de nombreux composés :  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Si}(\text{OH})_4$ ,  $\text{SiCl}_4$ . Donner la structure de Lewis pour chacun de ces composés.

### E. Cristallographie du silicium et du nitrure de silicium

Le silicium forme une structure de type diamant, c'est à dire une structure cubique faces centrées d'atomes de silicium, avec occupation d'un site tétraédrique (noté T) sur deux par un atome de silicium.

**E1.** Sur les figures 10, 10 bis et 10 ter ci-après quels sont les numéros correspondants aux sites T ? aux sites octaédriques d'une maille cubique faces centrées ?

**E2.** En déduire, dans une structure cubique faces centrées (cfc), le nombre de sites T et de sites O appartenant en propre à la maille

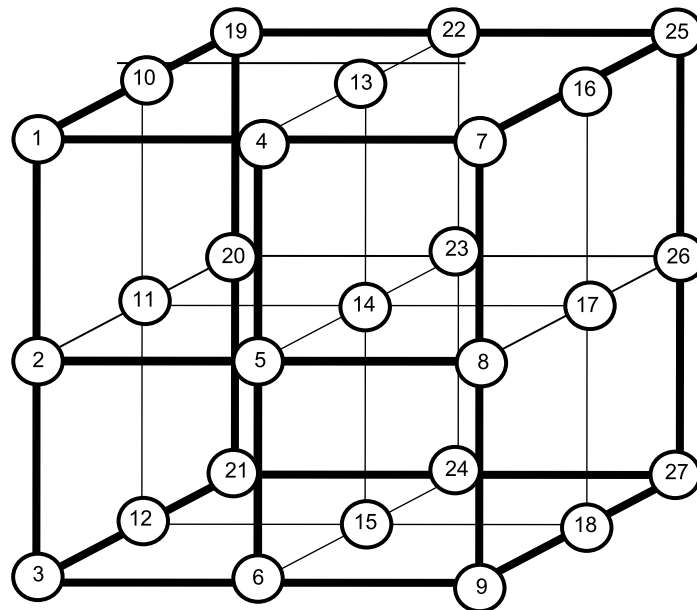
**E3.** En déduire la population de la maille de type diamant du silicium en détaillant le calcul. Préciser la coordinence de l'atome de silicium dans la structure (*ne pas oublier l'occupation d'un site T sur deux qui fait que la coordinence, la compacité, la masse volumique, le rayon des entités, ne sont pas celles obtenues avec une maille cfc simple*)).

**E4.** Écrire la relation entre le paramètre de la maille  $a$  et le rayon  $r(\text{Si})$  de l'atome de silicium dans la structure de type diamant.

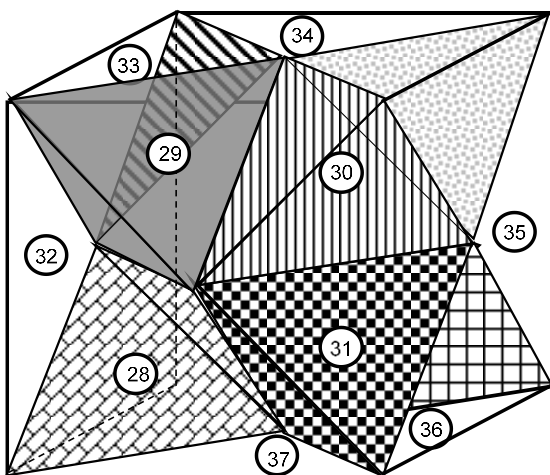
**E5.** A partir de la masse volumique fournie, établir que  $a$  vaut environ 357 pm et la valeur du rayon  $r(\text{Si})$  est d'environ 110 pm.

**E6.** Calculer la compacité de la structure. Comparer à celle du réseau cfc.

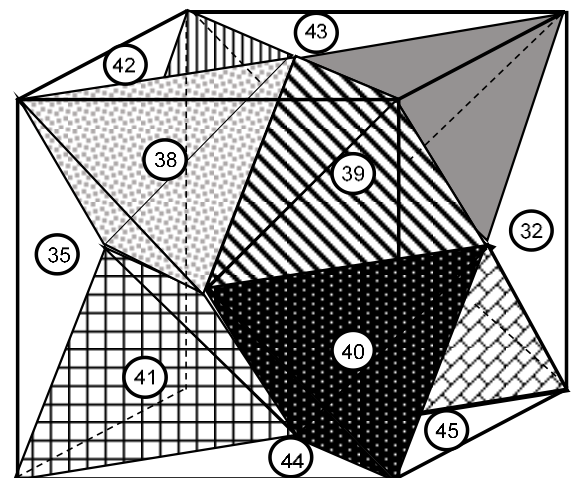
**E7.** Comment expliquer que le silicium soit un matériau très dur ? Pour ce faire, on détaillera la nature de la liaison Si-Si dans la structure.



**Figure 10.** Structure cubique faces centrées



**Figure 10 bis.** Structure cubique faces centrées



**Figure 10 ter.** Rotation de  $180^\circ$  de la figure 10 bis

Le nitrure de silicium, quant à lui, cristallise sous trois variétés dont l'une est appelée gamma. Cette dernière est une structure spinelle, c'est-à-dire une structure cubique faces centrées d'ions nitrure  $\text{N}^{3-}$ , dans

laquelle les ions de  $\text{Si}^{4+}$  occupent  $1/8^{\text{ème}}$  des sites tétraédriques (notés T) et la moitié des sites octaédriques (notés O).

**E8.** Le nitrure de silicium peut exister à l'état solide sous différentes variétés cristallines. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

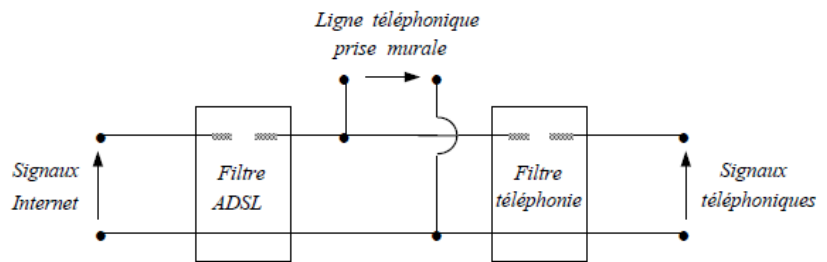
**E9.** L'occupation des sites T et O est-elle cohérente avec la stœchiométrie de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  ?

**E10.** Dans une structure cfc, l'habitabilité des sites T est inférieure à celle des sites O. Déterminer l'habitabilité des sites T en détaillant le calcul. Sachant que les alliages  $\text{Si}_3\text{N}_4$  sont des alliages d'insertion, en déduire le rayon maximal de l'ion  $\text{Si}^{4+}$ . Est-ce cohérent avec les données ?

## EXII. Filtre ADSL ( d'après concours pt)

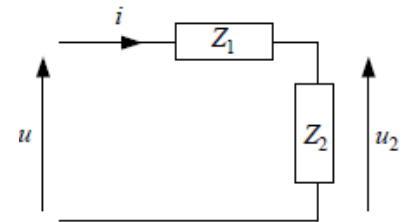
Les lignes téléphoniques acheminent les signaux téléphoniques traditionnels (fréquences  $f$  comprises entre 0 et 5,0 kHz) qui permettent les échanges de conversation et les signaux informatiques « Internet » (fréquences  $f$  comprises entre 25 kHz et 2,5 MHz).

Le but de cette partie est d'étudier un filtre qui permet de « récupérer » un seul type de signaux. Figure I.1 Tous les signaux (tension et intensité) considérés dans cet exercice sont supposés alternatifs sinusoïdaux : les grandeurs complexes associées sont soulignées (avec  $j^2 = -1$ ).



**A.** Le montage de la figure I.2, alimenté par une tension  $\underline{u}$  et parcouru par un courant  $\underline{i}$ , est constitué de deux impédances  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  associées en série.

Figure 2 :



**A.1.** Exprimer (démonstration non exigée) la tension complexe  $\underline{u}_2$  en fonction des grandeurs complexes  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  et  $\underline{u}$ .

**A.2.** Comment se nomme un tel montage ?

## B. Les deux types de filtres

Quatre grands types de filtres sont disponibles : filtres passe-bas, passe-haut, coupe-bande et passe-bande.

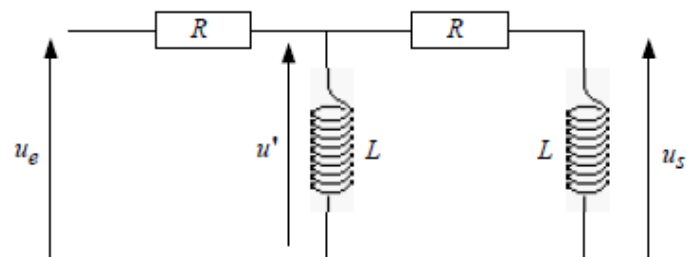
**B.1.** Préciser, sans calcul, le type de filtre à utiliser pour ne « récupérer » que les signaux informatiques.

**B.2.** Même question pour les signaux « téléphoniques » (destinés à la conversation).

**B.3.** Donner, sans démonstration, un ordre de grandeur de la fréquence de coupure  $f_c$  nécessaire.

**C. Étude d'un filtre.** Soit le filtre suivant, constitué de deux résistors identiques de résistance  $R$  et de deux bobines idéales identiques d'inductance  $L$ . La tension d'alimentation et la tension de sortie de ce quadripôle s'écrivent respectivement :  $u_e = U_{e,m} \cos \omega t$  et  $u_s = U_{s,m} \cos(\omega t + \varphi)$  (figure 3).

Figure 3



**C.1.** En dessinant un schéma équivalent en basse fréquence ( $f \rightarrow 0$ ), puis en haute fréquence ( $f \rightarrow +\infty$ ), déterminer, sans calcul, la nature (ou le type) de ce filtre. En déduire la nature des signaux que ce quadripôle laisse « passer ».

La réponse proposée à la question A.1. peut être utilisée pour résoudre la question suivante (C.2.).

**C.2.** Exprimer, d'une part, la tension de sortie complexe  $\underline{u}'$  en fonction des grandeurs  $\underline{u}_e$ ,  $R$  et  $\underline{Z}_L$  (impédance complexe de la bobine), puis, d'autre part, la tension complexe  $\underline{u}_s$  en fonction des grandeurs  $R$ ,  $\underline{u}'$  et  $\underline{Z}_L$ .

**C.3.** Il est rappelé que l'impédance complexe de la bobine s'écrit  $\underline{Z}_L = jL\omega$ . Écrire la fonction de transfert  $\underline{H} = \underline{u}_s / \underline{u}_e$  de ce filtre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{B + jC}$$

avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois nombres réels.

**C.4.** En déduire l'expression de  $\omega_0$  en fonction de  $R$  et  $L$  permettant de mettre la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H}(jx) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + 3jx} \text{ et la valeur numérique du gain maximal } G_{dBmax}. \text{ On pourra utiliser } \log 3 \approx 0,5.$$



**C.5.** Donner les expressions, voire les valeurs numériques approchées le cas échéant, du gain, en décibels,  $G_{dB} = 20 \log|H(jx)|$  pour  $x \rightarrow 0$ ,  $x = 1$  et  $x \rightarrow +\infty$ . Rassembler ces résultats dans le tableau ci-dessous (tableau à recopier) :

Valeurs de $x$	$x \rightarrow 0$	$x = 1$	$x \rightarrow +\infty$
$G_{dB}$ (en décibels)			

**C.6.** En déduire le diagramme de Bode asymptotique  $G_{dB} = f(\log x)$  de ce filtre. Esquisser, sur ce graphe, l'allure de la courbe réelle correspondante.

### **EXIII.** ( d'après concours national deug 2016)

Une piste cylindrique de rayon  $R$  est fixe dans le référentiel terrestre galiléen  $R_T$  rapporté au repère  $\{O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$

Un objet ponctuel  $S$ , de masse  $m$ , glisse **sans frottement** à l'intérieur de cette piste.  $S$  est repéré par ses coordonnées polaires  $(R, \theta)$ .

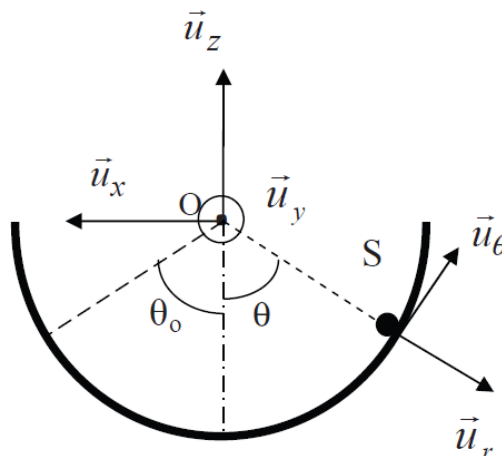
L'action de la piste, sans frottement, se traduit par une force  $\vec{N}$ , de module  $N$ , normale à la piste.

**On raisonne dans le référentiel  $R_T$ , mais tous les vecteurs seront exprimés dans la base cylindrique, unitaire orthonormée**

**directe :**  $B_c = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

A la date  $t = 0$ ,  $S$  est sur la piste en  $\theta_0 < 0$  ( $\theta_0 = -\pi/3$  par exemple) et est lâché sans vitesse.

**Les données sont :**  $m, R, \theta_0$  et l'intensité de la pesanteur  $g$ .



1. Exprimer, en simplifiant, dans la base  $B_c$ , la vitesse  $\vec{v}$  et l'accélération  $\vec{a}$  de  $S$ . (on donne les composantes cylindriques du vecteur accélération dans  $B_c$  :  $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \ddot{z})$ )

2. Par application du théorème de la résultante dynamique ( 2<sup>ème</sup> loi de Newton), trouver deux relations liant les données,  $N$ ,  $\theta$  et ses dérivées temporelles.

3. Déterminer, en fonction de  $\theta$  et des données, l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  (on posera  $E_p = 0$  lorsque  $\theta = \pi/2$ ).

4. Exprimer l'énergie mécanique  $E_m$  de  $S$  et son énergie mécanique initiale  $E_{m0}$ .

5. Enoncer précisément le théorème de l'énergie cinétique et le théorème de l'énergie mécanique (on distinguera les actions conservatives et non conservatives).

6. Donner une relation liant  $v^2$ , les données et  $\theta$ .

7. Déterminer l'expression de  $N$  en fonction de  $\theta$  et des données.

### **CORR :EXI.Première partie : AFM en mode oscillant**

A-A-1- hauteur pointe :  $20\mu\text{m}$  ; largeur pointe  $15\mu\text{m}$  ; épaisseur levier  $4\mu\text{m}$  : largeur levier  $45\mu\text{m}$

A-2- grossissement, microscope traditionnelle  $\times 10$  ou  $100$

A-3- Problème avec la diffraction car dimension de l'objet de l'ordre de grandeur des longueur d'onde visible.

A-4-  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$       A-5-  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$       A.N.  $\lambda = 2 \cdot 10^{-11}m$

A-6-  $\lambda \ll$  dimension du système pas de problème de diffraction comme en microscopie optique

B- B-1-  $[E] = [force]L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

B-2- A l'équilibre  $\vec{F}_{ext} + \vec{T} = 0$

Projection sur  $\vec{e}_z$  :  $F_{ext} - k(z - l_0) = 0$  or longueur à vide nulle donc  $z = \frac{F_{ext}}{k} = \frac{4L^3}{Eae^3} F_{ext}$

On obtient  $k = \frac{Eae^3}{4L^3}$

B-3- on se place dans le système masse ressort : PFD  $m\vec{a} = \vec{F}_{ext} + \vec{T} + \vec{F}_{frottement}$

Projection selon  $\vec{e}_z$  :  $m\ddot{z} = F_m \cos(\omega t) - kz - \alpha\dot{z}$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_m}{m}\cos(\omega t)$$

Par identification :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ;  $A = \frac{F_m}{m}$  ;  $\gamma = \frac{\alpha}{2m}$

B-4-  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

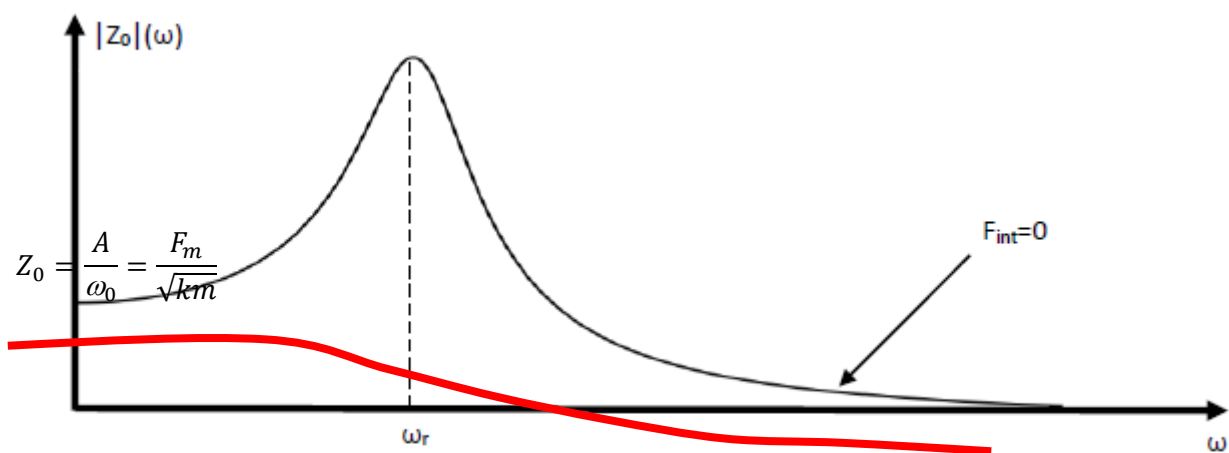
B-5- passage en complexe :  $(-\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2)\underline{Z}_0 = A \Rightarrow \underline{Z}_0 = \frac{A}{-\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$

B-6-  $|\underline{Z}_0| = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega_0}{Q}\omega)^2}}$

B-7- Il y a résonance quand  $f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega_0}{Q}\omega)^2$  passe par un minimum.

Etude de  $F(X) = (\omega_0^2 - X)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}X$  ;  $F'(X_r) = -2(\omega_0^2 - X_r) + \frac{\omega_0^2}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow X_r = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$

Or  $X_r = \omega_r^2 > 0$  donc  $\omega_r$  existe si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  avec  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$



B-8-

C-1- Une force conservative a son travail qui est indépendant du chemin suivi : C-2- répulsive pour  $r < r_m$  car  $F(r) > 0$  puisque  $E_p$  décroissante ; attractive pour  $r > r_m$  car  $F(r) < 0$

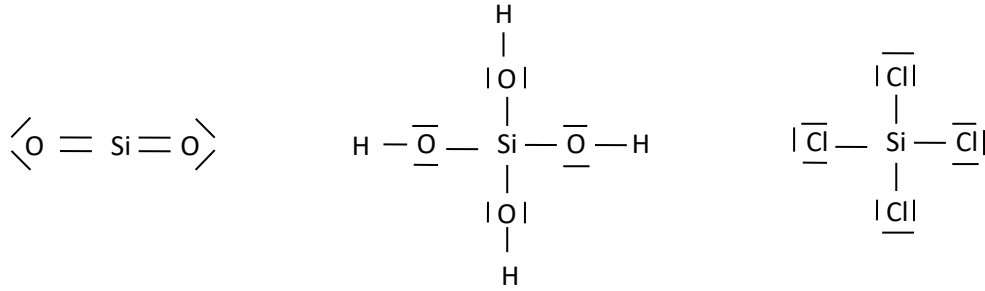
Avec  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$  C-3- il faut apporter  $E_p(r_m)$ .

D-1-  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$  : rouge électrons de Coeur ; vert électrons de valence

D-2-  $n=3$  : 3<sup>ème</sup> période ;  $3s^2 3p^2$  : 4+10 = 14<sup>ème</sup> colonne.

Le carbone C qui a 4 électrons de valence. C est plus électronégatif car au dessus (2<sup>ème</sup> période)

D-3-



E-1- No=+IV sites 29, 30,  
T : 28,  
31 et 38, 39, 40, 41

Sites O : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26

E-2- sites T : 8 ; sites O :  $12 * \frac{1}{4} + 1 = 4$

E-3- 8 sites T  $\times \frac{1}{2} + 8 \text{ sommets} \times \frac{1}{8} + 6 \text{ centres face} \times \frac{1}{2} = 8$  atomes par maille

Un atome de Silicium aura une coordinence de 4 qui correspond à celle d'un atome dans un site T

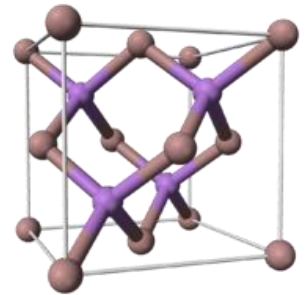
E-4- Contact sur la diagonale du cube de coté  $\frac{a}{2}$  dans le site T :

$$\left(\frac{a}{2} \times \sqrt{3}\right) \frac{1}{2} = 2r_{\text{Si}} \Rightarrow r_{\text{Si}} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{E-5- } \rho = \frac{\text{masse des atomes}}{\text{volume maille}} = \frac{8 * M_{\text{Si}}}{N_a * a^3} = \frac{M_{\text{Si}} * 3\sqrt{3}}{N_a * r_{\text{Si}}^3 * 8^2} \Rightarrow a = 540 \text{ pm et } r_{\text{Si}} =$$

$$\left(\frac{M_{\text{Si}} * 3\sqrt{3}}{N_a * \rho * 8^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 110 \text{ pm}$$

$$\text{E-6- } C = \frac{\text{volume des atomes}}{\text{volume maille}} = \frac{8 * 4/3 \pi r_{\text{Si}}^3}{a^3} = \frac{8 * 4 * \pi * a^3 * 3\sqrt{3}}{3 * 8^3 a^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} = 0.34 \text{ inférieur à la compacité maximale du cfc (0.74)}$$



E-7- Le silicium est matériau très dur car les atomes de Si sont liés par des liaisons covalentes

E-8- on parle de variétés allotropiques

E-9- nombre de Si par maille : 4 (cfc)

$$\text{Nombre de N par maille : } \frac{1}{8} * 8 \text{ sites T} + \frac{1}{2} * 4 \text{ sites O} = 3$$

La stœchiométrie  $\text{Si}_3\text{N}_4$  est respectée.

$$\text{E-10- habitabilité des sites T : contact sur la diagonale du cube de coté } a/2 \quad 2(r_{\text{Tmax}} + r_{\text{N}}) = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow r_{\text{Tmax}} = \frac{\sqrt{3}a}{4} - r_{\text{N}}$$

$$\text{Pour un cfc contact sur diagonale des faces de coté } a : a\sqrt{2} = 4r_{\text{N}} \text{ d'où } r_{\text{Tmax}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1\right)r_{\text{N}} = 28 \text{ pm}$$

Ceci est cohérent avec les atomes de Si qui sont dans les sites T (coordinence 4) :  $r_{\text{Si}} = 27 \text{ pm} < r_{\text{Tmax}}$

## EXII

### A.I.A.1.

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u}$$

I.A.2. Ce montage est appelé pont diviseur de tension.

Les deux types de filtres

I.B.1. Pour ne « récupérer » que les signaux informatiques, on veut que les hautes fréquences « passent » et que les basses fréquences soient coupées. On utilisera donc un filtre passe-haut.

I.B.2. Pour ne « récupérer » que les signaux téléphoniques, on veut que les basses fréquences « passent » et que les hautes fréquences soient coupées. On utilisera donc un filtre passe-bas.

I.B.3. La fréquence de coupure de ces filtres devra être d'environ 10 kHz.

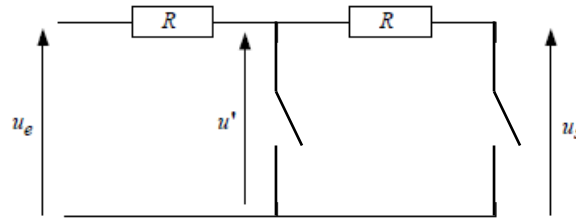
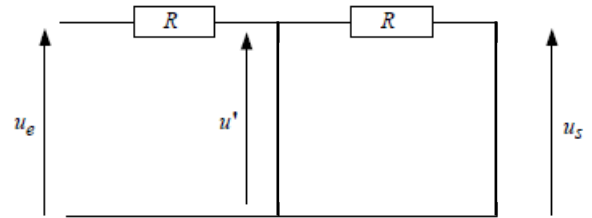


## Etude d'un filtre

### I.C.1. Schéma équivalent en basse fréquence :

Donc  $u_s = 0$  lorsque  $f \rightarrow 0$ .

Schéma équivalent en haute fréquence :



Donc  $u_s = u_e$  lorsque  $f \rightarrow +\infty$

Ce quadripôle laisse donc « passer » les signaux de haute fréquence : c'est un filtre passe-haut.

### I.C.2. La formule du pont diviseur de tension donne :

$$\underline{u_s} = \frac{\underline{Z_L}}{R + \underline{Z_L}} \underline{u'}$$

Notons  $\underline{Z_{eq}}$  l'impédance équivalente à la bobine en parallèle avec l'ensemble en série (résistance+bobine). On a :

$$\underline{Z_{eq}} = \frac{\underline{Z_L} (R + \underline{Z_L})}{R + 2 \underline{Z_L}}$$

La formule du pont diviseur de tension donne alors :

$$\underline{u'} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R + \underline{Z_{eq}}} \underline{u_e} = \frac{\underline{Z_L} (R + \underline{Z_L})}{R (R + 2 \underline{Z_L}) + \underline{Z_L} (R + \underline{Z_L})} \underline{u_e}$$

$$\underline{u'} = \frac{\underline{Z_L} (R + \underline{Z_L})}{R^2 + \underline{Z_L}^2 + 3R\underline{Z_L}} \underline{u_e}$$

(ou bien utiliser le Th de Millmann pour exprimer  $u'$  en fonction de  $u_e$  et  $u_s$ )

### I.C.3. D'après les réponses précédentes :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u'}} \frac{\underline{u'}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{Z_L}}{R + \underline{Z_L}} \frac{\underline{Z_L} (R + \underline{Z_L})}{R^2 + \underline{Z_L}^2 + 3R\underline{Z_L}}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_L}^2}{R^2 + \underline{Z_L}^2 + 3R\underline{Z_L}}$$

$$\underline{H} = \frac{-(L\omega)^2}{R^2 - (L\omega)^2 + 3jRL\omega}$$

I.C.4. En factorisant par  $R^2$  au dénominateur de la fonction de transfert, on a :

$$\underline{H} = \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1 - \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2 + 3j\frac{L}{R}\omega}$$

La pulsation propre de ce filtre est donc :

$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

Sachant que le facteur de qualité de ce filtre vaut  $1/3$ , il n'y a pas de résonance car  $1/3 < 1/\sqrt{2}$  (sinon vérifier par l'étude de la fonction ...) donc le gain maximum se trouve pour  $\omega \rightarrow \infty$ . Le gain maximal est donc :

$$G_{dBmax} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log[|\underline{H}(j\omega)|] \quad G_{max} = 1$$

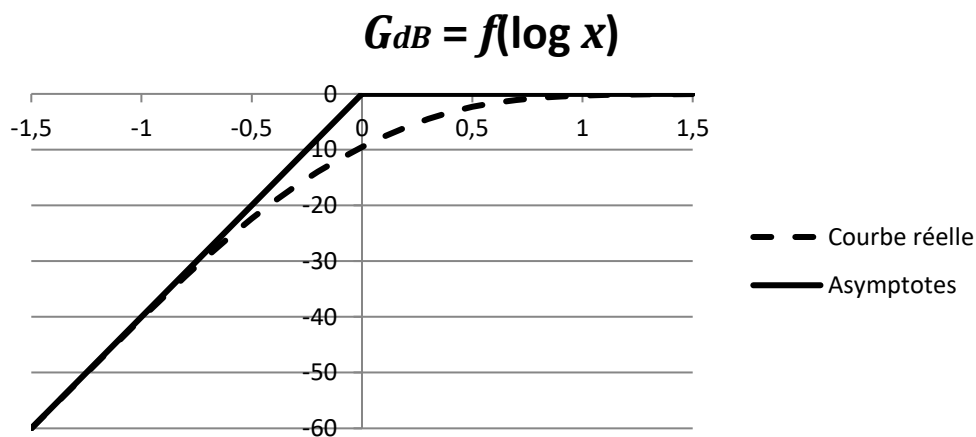
$$G_{dBmax} = 0$$

I.C.5.

$$G_{dB} = 20 \log \left| \frac{-x^2}{1 - x^2 + 3jx} \right| = 40 \log x - 10 \log[(1 - x^2)^2 + 9x^2]$$

Valeurs de $x$	$x \rightarrow 0$	$x = 1$	$x \rightarrow +\infty$
$G_{dB}$ (en décibels)	$40 \log x$	$-10$	$0$

II.C.6. Le filtre étudié est un filtre passe-haut du second ordre dont le facteur de qualité vaut  $1/3$  donc il n'y a pas de résonance. On en déduit l'allure du diagramme de Bode en amplitude :



EXIII : 1.  $\vec{v}(\dot{r}, r\dot{\theta}, 0)$  soit  $(R, R\dot{\theta}, 0)$  et  $\vec{a}(-R\dot{\theta}^2, R\ddot{\theta}, 0)$

2. On projette la 2<sup>ème</sup> loi de Newton .... ( il y a deux forces : le poids de la bille et la réaction normale du support)

Sur  $\vec{u}_r$  :  $mg \cdot \cos\theta - N = m(-R\dot{\theta}^2)$  (1)

Sur  $\vec{u}_\theta$  :  $-mg \cdot \sin\theta = mR\ddot{\theta}$

3.  $E_p = mgR(1 - \cos\theta) + K$  avec  $K$  tel que  $E_p = 0$  si  $\theta = \pi/2$  soit  $0 = mgR + K$  dc  $K = -mgR$  et  $E_p = -mgR \cdot \cos\theta$

4.  $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mgR \cdot \cos\theta$  et  $E_{m0} = -mgR \cdot \cos\theta_0$

6.  $E_m = E_{m0}$  dc  $\frac{1}{2}mv^2 - mgR \cdot \cos\theta = -mgR \cdot \cos\theta_0$  (2)

7. (1) donne  $mg \cdot \cos\theta - N = -mv^2/R$  soit  $N = mg \cdot \cos\theta + mv^2/R$

On utilise alors (2) pour remplacer  $v^2$  en fonction des données et  $\theta$  :

$N = mg(3 \cos\theta - 2 \cos\theta_0)$