

EX1. Une pompe à chaleur effectue le cycle de Joule inversé suivant :

- * L'air pris dans l'état A de température T_0 et de pression P_0 est comprimé suivant une adiabatique quasi statique (ou réversible) jusqu'au point B où il atteint la pression P_1 .
- * Le gaz se refroidit à pression constante et atteint la température finale de la source chaude, T_1 , correspondant à l'état C.
- * L'air est ensuite refroidi dans une turbine suivant une détente adiabatique quasi statique (ou réversible) pour atteindre l'état D de pression P_0 .
- * Le gaz se réchauffe enfin à pression constante au contact de la source froide et retrouve son état initial A.

L'air reste gazeux : il ne subit pas de changements d'état, on donne l'entropie du gaz parfait :
 $S = C_v \ln T + nR \ln V + K$ ainsi que $S = C_p \ln T - nR \ln P + K'$.

On considère l'air comme un gaz parfait de coefficient isentropique $\gamma = 1,4$. On posera $\beta = 1 - \gamma^{-1}$ et $a = P_1/P_0$.

$T_0 = 283\text{K}(10^\circ\text{C})$, $T_1 = 298\text{K}(25^\circ\text{C})$; $a = 5$

1) Représenter le cycle parcouru par le fluide dans un diagramme de Clapeyron (P, V).

2) Exprimer les températures T_B et T_D en fonction des paramètres à prendre au choix parmi : T_0 , T_1 , a , β .

Par la suite, on prendra $T_B = 448\text{ K}$ et $T_D = 188\text{ K}$.

3) Définir l'efficacité e de la pompe à chaleur à partir des quantités d'énergie échangées au cours du cycle.

Montrer qu'elle s'exprime seulement en fonction de a et β .

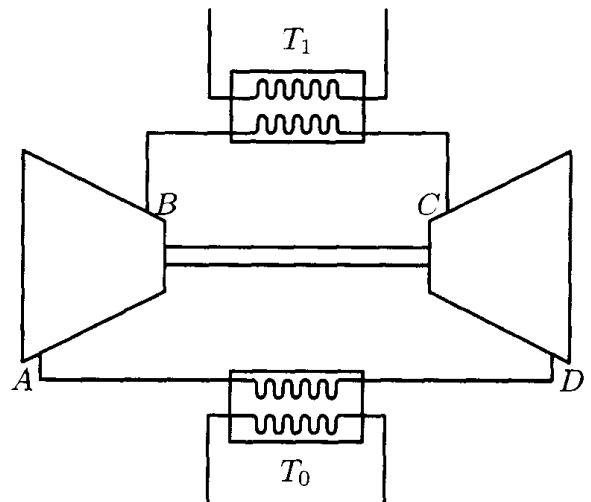
(Pour cela, exprimer Q_C , le transfert thermique au contact du thermostat chaud en fonction de T_C et T_B , n , R , γ puis en fonction de $T_0, T_1, a, \beta, n, R, \gamma$; faire de même pour Q_f , le transfert thermique au contact du thermostat froid en fonction de T_D et T_A , n, R, γ puis en fonction de $T_1, T_0, a, \beta, n, R, \gamma$, en déduire e sachant qu'elle s'exprime en fonction de Q_C et Q_f). e vaut 2,7.

4) Quelles doivent être les transformations du fluide si on envisage de faire fonctionner la pompe à chaleur suivant un cycle de Carnot réversible entre les températures T_0 et T_1 ? Établir l'expression de son efficacité e_r en fonction de T_1 et T_0 .

5) Comparer a priori les valeurs de e et e_r . Interpréter la différence.

6) Donner l'expression de l'entropie créée, S_i , pour une mole d'air mise en jeu dans le parcours du cycle de Joule inversé, en fonction de $x = T_0 a^\beta / T_1$, R et β . Étudier le signe de cette expression pour $x \geq 0$.

7) La pompe à chaleur envisagée est utilisée pour chauffer une maison. Sachant qu'en régime permanent les fuites thermiques s'élèvent à $Q_{\text{fuites}} = 27\text{kW}$, calculer la puissance mécanique du couple compresseur-turbine qui permet de maintenir la maison à température constante.



EX2 : Pompe à vide.

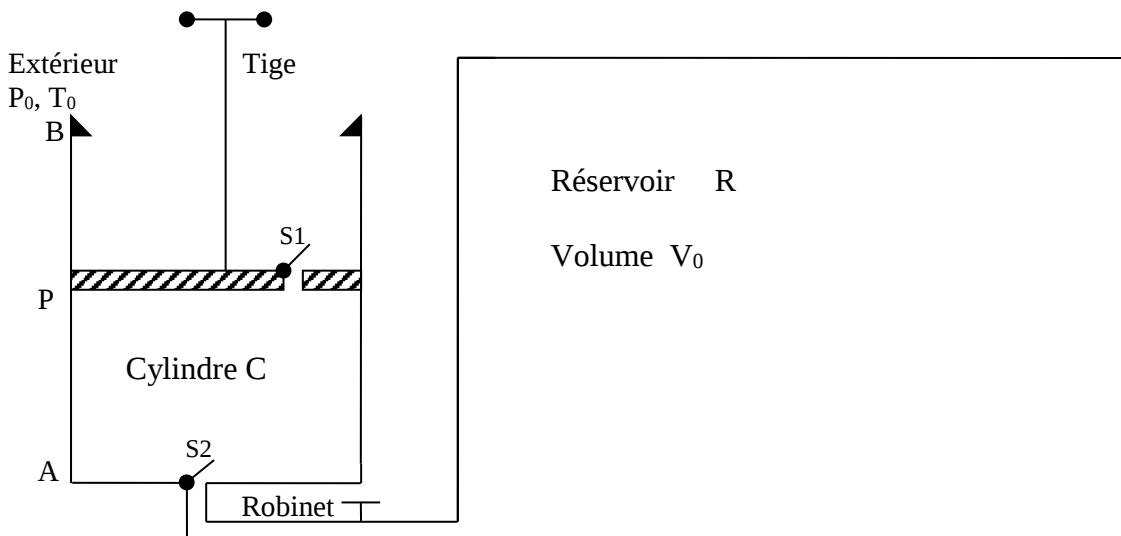
Le schéma suivant, représente, en coupe, un réservoir R, un cylindre C (leurs parois sont diathermanes, c'est-à-dire perméables à la chaleur) et un piston P dont la course est limitée par le fond A et la cale B.

Quand le piston est en A, le volume du cylindre limité par le piston est V_A , quand il est en B : V_B .

Le système est de plus, muni de deux soupapes : S_1 permettant le passage du gaz uniquement de C vers l'extérieur et S_2 uniquement de R vers C, et ce, dès que la différence de pression entre les parties inférieure et supérieure de la soupape est positive.

Le cylindre est relié, par un tube de volume négligeable devant les autres volumes du système, au réservoir R de volume V_0 , très supérieur à V_B , contenant de l'air, supposé gaz parfait, dans lequel on souhaite «faire le vide ».

1) Dans l'état initial, le piston est en B, le cylindre et le réservoir contiennent de l'air à la pression atmosphérique P_0 et à la température T_0 . On pousse le piston jusqu'en A exactement contre le fond (on considère qu'ici $V_A = 0$) et on le ramène en B assez lentement pour que la température reste T_0 . Expliquer les



différents transferts de gaz au cours de cet aller-retour.

Exprimer la pression P_1 dans R quand le piston revient en B en fonction de

P_0 et d'un rapport de volumes .

2) Si les transferts de gaz s'effectuent encore de la même façon, exprimer littéralement la pression P_2 après un deuxième aller-retour du piston.

3) Donner, dans ce cas, la forme générale de P_n après le nième aller-retour. Quelle est la limite de P_n quand $n \rightarrow \infty$?

4) En réalité, quand le piston est en A, le volume V_A entre le piston et le fond n'est pas nul. La limite théorique précédente ne peut pas être atteinte. Pourquoi ? Déterminer la véritable limite théorique de cette pompe à vide. Pourquoi appelle-t-on V_A le « volume nuisible »?

EX3. Un récipient initialement vide de volume V est plongé dans un thermostat à 100°C .

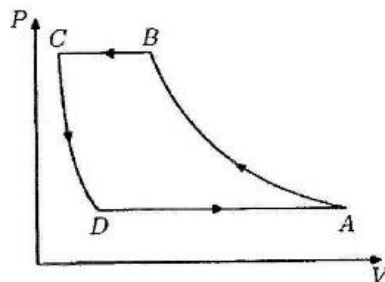
- 1) On introduit $m=1,8\text{g}$ d'eau liquide dans le récipient ; calculer le volume minimal $V_{\min}$ pour que toute l'eau soit sous forme vapeur
- 2) Vérifier par un calcul simple, la valeur de v_v qui est fournie ; commenter aussi la valeur de v_l .
- 3) On prend $V=1\text{L}$, exprimer la fraction massique en vapeur x_v de manière exacte puis la calculer de manière approchée en considérant $v_v \gg v_l$.
- 4) On chauffe le mélange de sorte que le mélange s'enrichit en vapeur, tout en restant à 100°C , soit x'_v le nouveau titre massique en vapeur ; exprimer Q le transfert thermique qui a été absorbé par le mélange .

Données : $M(\text{eau})=18\text{g/mol}$; $R = 8,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. Pression de vapeur saturante à 100°C : $P_s=1,0 \text{ bar}$; volumes massiques respectivement de l'eau liquide et eau vapeur à cette température : $v_l=1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ et $v_v=1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$; on notera $L_{\text{vap},100}$ l'enthalpie de vaporisation à cette température ;

$$8,3, 3,7 \sim 30 \quad ; \quad \frac{1}{1,8, 1,7} \sim 0,33$$

Ex ✓

2) Le cycle est :



2) En appliquant les lois de Laplace aux deux adiabatiques AB et CD on obtient :

$$T_B = T_0 a^\beta = 448 \text{ K} \text{ et } T_D = T_1 / a^\beta = 188 \text{ K}.$$

3) L'efficacité de la pompe à chaleur est $e = -Q_{BC}/W$ où W est le travail reçu sur un cycle. D'après le premier principe $W = -Q_{BC} - Q_{DA}$ et $e = \frac{1}{1 + Q_{DA}/Q_{BC}}$

Les quantités de chaleurs Q_{BC} et Q_{DA} étant échangées à pression constante

$$Q_{DA} = n c_p (T_0 - T_D); \quad Q_{BC} = n c_p (T_1 - T_B) = -Q_{DA} a^\beta.$$

L'efficacité prend l'expression $e = \frac{1}{1 - a^{-\beta}} = 2,71$

4) Un cycle de Carnot est un cycle réversible composé de deux adiabatiques réversibles et de deux isothermes T_0 et T_1 sur lesquelles s'effectuent les échanges de chaleur avec les thermostats. Sur un cycle, la variation d'entropie du fluide est nulle. Ainsi, la variation d'entropie totale coïncide avec la variation d'entropie des deux sources, elle-même nulle, puisque le cycle est réversible : $-\frac{Q_{BC}}{T_1} - \frac{Q_{DA}}{T_0} = 0$ qui donne $Q_{DA}/Q_{BC} = -T_0/T_1$ et

$$e = \frac{1}{1 - T_0/T_1} = \frac{T_1}{T_1 - T_0} = 19,9.$$

5) L'efficacité du cycle de Carnot est supérieure au cycle de Joule car il s'agit d'un cycle réversible (théorème de Carnot).

6) Au cours d'un cycle, l'entropie créée correspond à la variation d'entropie des deux sources froide et chaude.

$$s_i = -\frac{Q_{BC}}{T_1} - \frac{Q_{DA}}{T_0} = \frac{R}{\beta} \left\{ x + \frac{1}{x} - 2 \right\}$$

La fonction $s_i(x)$ est décroissante pour $1 > x > 0$ puis croissante pour $x > 1$. Comme

$$s_i = 0 \text{ en } x = 1, \text{ il s'ensuit que } s_i \geq 0.$$

Numériquement $s_i = 4,92 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

7) En régime permanent ce qui est perdu est compensé par ce qui est fourni, la puissance

mécanique cherchée sera $P = \frac{\dot{Q}_f}{e} = 7,4 \text{ kW}.$

15,4

Ex2 = Pompe à vide

- 1) A la descente, S_1 ouvert, S_2 fermé, l'air du cylindre est donc chassé vers l'extérieur. A la montée, S_1 fermé, S_2 ouverte, donc de l'air du réservoir pénètre par aspiration dans le cylindre, demeurant isotherme. A la fin de l'aller-retour, on cherche donc la pression P_1 qui régit dans le volume de réservoir + cylindre (soit $V_0 + V_B$) contenant le même nombre de moles à la même température qu'à l'état initial par le réservoir soit P_0, V_0 .
- $$P_0 V_0 = n_0 R T_0 = P_1 (V_0 + V_B)$$
- $$\Rightarrow P_1 = P_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)$$

2) $P_2 = P_1 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)$

3) $P_n = P_{n-1} \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)$ avec $n > 1$
on en déduit $P_n = P_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)^n$

$P_n \rightarrow \infty$ car $\left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right) < 1$
(suite géométrique de raison $|q| < 1$)

- 4) Par rapport au 1), il faut remplacer V_0 par $V_0 + V_A$ ce qui donne
- $$P_1 = P_0 \cdot \left(\frac{V_0 + V_A}{V_0 + V_B} \right)$$

mais $P_2 = P_1 \left(\frac{V_0 + (P_0/P_1)V_A}{V_0 + V_B} \right)$

$P_n = P_{n-1} \cdot \left(\frac{V_0 + (P_0/P_{n-1})V_A}{V_0 + V_B} \right)$

si $n \rightarrow \infty$, on voit que $P_n \rightarrow P_0 \frac{V_A}{V_0 + V_B}$

(à la limite, quand la pression dans C est très faible ≈ 0 , la saupape S_1 ne s'ouvre que qd la pression du cylindre est à peine égale à P_0 et le volume égal au volume minimal V_A donc $P_0 V_A = P_\infty (V_0 + V_B)$)

Ex3

- 1) si $V < V_{un}$, la vapeur se liquéfie. A $V \geq V_{un}$, l'eau est sous forme 100% vapeur on peut lui appliquer la loi des GP. ; $P = P_S$

$$P_S V_{un} = n R T = \frac{m}{M} R T \Rightarrow V_{un} = \frac{m R T}{M P_S}$$

$$V_{un} = \frac{1,8 \text{ g} \cdot 8,317 \text{ J/mol}\cdot\text{K}}{18 \text{ g/mol} \times 10^5} = 10^{-4} \cdot 8,317 = 30 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 3 \text{ L}$$

2) $v_r = \frac{V}{m}$ pour la vapeur soit $v_r = \frac{1}{\rho_{\text{vapeur}}} = \frac{R T}{M P_S} = 1,7 \text{ m}^3/\text{kg}$

- 3) $V = 1 \text{ L} < 3 \text{ L}$ donc on est en présence d'un équilibre { vapeur, liquide }
on utilise $x_v = \frac{v - v_L}{v_r - v_L}$ (règle des moments)

$x_v \approx \frac{v}{v_r}$ car $v_r \gg v_L$ et $v \gg v_L$

$$x_v \approx \left(\frac{V}{m} \right) \cdot \frac{1}{v_r} = \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 1,7} = 0,33 = 33\%$$

4) $Q = \Delta x_v \cdot m \cdot L_{\text{vap}, 100}$
avec $\Delta x_v = x'_v - x_v$

car une masse $m(x'_v - x_v)$ de vapeur s'est ajoutée à l'état final qui veut dire qu'une masse $m(x'_v - x_v)$ s'est évaporée. Elle a donc absorbé $m(x'_v - x_v) \cdot L_{\text{vap}, 100}$.