

Partie 3 ch5 : Moment cinétique, mécanique des systèmes , mouvement de rotation d'un solide.

A)Théorème du moment cinétique pour un point matériel (TMC)

On considère un pt matériel (puis un système solide)en mouvement de rotation ; la 2^{ème} loi de Newton (PFD) n'est pas très adaptée pour cette étude car la rotation nécessite une action du support (axe) assez difficile à évaluer -> on utilise dc plutôt une csq du PFD spécialement utile à la rotation.

I.Moment cinétique d'un point matériel.

1)Par rapport à un point O .

Soit un point M (masse m , vitesse $\vec{v}$) ; le moment cinétique $\vec{L}_O$ (noté parfois $\vec{\sigma}_O$) de M , autour du point O est :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \times m\vec{v} = \vec{OM} \times \vec{p} \quad \text{Unité SI : kg.m}^2.\text{s}^{-1}$$

La direction et le sens de $\vec{L}_O$ indiquent la manière dont le point M tourne autour de O , à l'instant t

$\vec{L}_O \perp$ au plan défini par ($\vec{OM}$ et $\vec{v}$) ; son sens est donné par la règle de la main droite

$$\|\vec{L}_O\| = OM.mv. |\sin(\vec{OM}, \vec{v})|$$

Propriété : $\vec{L}_O = \vec{0}$ si $\vec{v}$ et /ou $\vec{OM} = \vec{0}$ ou bien si $\vec{OM} // \vec{v}$ (pas de rotation mais mvt rectiligne dirigé vers O)

*Autre calcul :

$$\|\vec{L}_O\| = OM.mv.\sin\alpha = mvd$$

d étant la distance du vecteur $\vec{v}$ à O (bras de levier)

2)Par rapport à un axe orienté :le moment cinétique scalaire

Soit un axe fixe $\Delta(O, \vec{u}_\Delta)$, $\vec{u}_\Delta$ étant un vecteur unitaire , le moment cinétique scalaire L_Δ de M par rapport à l'axe Δ est : $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$ (O est un point fixe de Δ , lui-même fixe)

$$L_\Delta = (\vec{OM} \times m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta \quad (\text{produit mixte})$$

-Si $L_\Delta > 0$ (resp. < 0) , le point M est plutôt en rotation dans le sens direct (resp. indirect) autour de l'axe (cf fig et le projeté de $\vec{v}$ dans le plan normal à l'axe)

-Si $L_\Delta = 0$, M ne tourne pas autour de l'axe car soit $\vec{v}$ dirigé vers l'axe , soit $\vec{v} //$ l'axe (cf propriétés du produit mixte : nul si les 3 vecteurs $\in$ au même plan ou si 2 au moins sont $//$)



Propriété : invariance de L_Δ par rapport au point de l'axe choisi :

Soient O et O' deux points $\in \Delta$, en utilisant la linéarité du produit vectoriel, la distributivité du produit scalaire et les propriétés du produit mixte (nul si 2 vecteurs au moins sont //), on montre que calculer L_Δ à partir de $\vec{L}_O$ ou $\vec{L}_{O'}$ revient au même (heureusement)

$$\vec{L}_{O'} \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{O'M} \times m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta = ((\vec{O'O} + \vec{OM}) \times m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{O'O} \times m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta + \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta \text{ car } (\vec{O'O} \times m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta = 0$$

Autre démonstration en revenant à la définition du produit vectoriel et ds le cas part. simple où $\vec{OM} \perp \vec{v}$:
O est à l'intersection de Δ et du plan $\perp \Delta$ passant par M, O' est en dehors de ce plan.

$$\vec{L}_{O'} \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{O'M} \times m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta = \frac{OM}{\sin \alpha} mv \vec{u} \cdot \vec{u}_\Delta = \frac{OM mv}{\sin \alpha} \cos \alpha' = OM \cdot mv = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta \text{ car } \sin \alpha = \cos \alpha'$$

* L_Δ ne dépendant pas du point O de Δ , alors on peut prendre O tel que $OM \perp \Delta$ c-à-d O est l'intersection du plan passant par M $\perp \Delta$, avec Δ (plus simple)

Ce qui compte dans L_Δ , c'est le projeté de $\vec{v}$ dans le plan $\perp \Delta$

Prenons $O \in \Delta$, c'est bien plus simple, évaluons $(\vec{OM} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta$ avec $\vec{v} = \vec{v}_P + \vec{v}_\Delta$

Le produit mixte est bilinéaire, c'est aussi $(\vec{OM} \times (\vec{v}_P + \vec{v}_\Delta)) \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{OM} \times \vec{v}_P) \cdot \vec{u}_\Delta + (\vec{OM} \times \vec{v}_\Delta) \cdot \vec{u}_\Delta$ or le dernier terme est nul : cqfd

$L_\Delta = \pm m \|\vec{v}_P\| d$ (le signe $\pm$ étant donné par la règle du tire-bouchon ou règle de la main droite (refermée) et $|\vec{L}_\Delta| = m \|\vec{v}_P\| d$; d étant le bras de levier c-à-d la distance de $\vec{v}_P$ à Δ .

II. Moment d'une force

1) Par rapport à un point

Soit $\vec{F}$ agissant sur le point M (point d'application de M), le moment

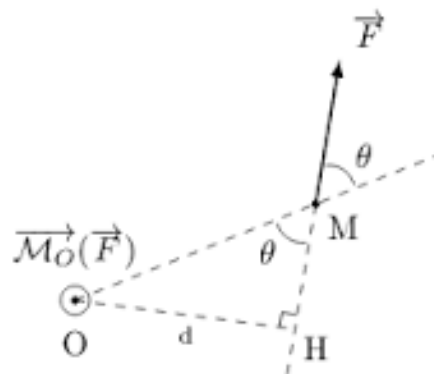
de $\vec{F}$ en O est $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \times \vec{F}$

(en N.m). Le sens physique de $\vec{M}_O(\vec{F})$ est d'indiquer vectoriellement comment la force va avoir tendance à faire tourner le point autour de O.

Si la force passe par O, le moment est nul.

Rq : - la déf'n est similaire à $\vec{L}_O = \vec{OM} \times \vec{p}$ mais $\vec{p} \leftrightarrow \vec{F}$

- on a les mêmes csq : $\vec{M}_O = \vec{0}$ si $\vec{F}$ ou $\vec{OM} = \vec{0}$ ou si $\vec{OM} \parallel \vec{F}$ (c-à-d $\vec{F}$ dirigée vers O)



2) Par rapport à un axe orienté (moment scalaire), bras de levier.

On définit aussi le moment scalaire d'une force $\vec{F}$ par rapport à l'axe $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ par

$$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{OM} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Attention au signe : il indique si la force, lorsqu'elle est appliquée au point matériel M, a tendance à le faire tourner, dans les sens + ou - autour de Δ .

Rq : *défin similaire à L_Δ ; là encore , $M_\Delta (\vec{F})$ ne dépend pas du point O de Δ choisi pour le calculer et heureusement. , le + simple est de le prendre comme étant l'intersection du plan $\perp \Delta$ passant par M avec Δ .

*2 cas importants pour lesquels le moment scalaire est nul :- $\vec{F} // \Delta$ - le support de $\vec{F}$ passe par Δ (car alors $\vec{M}_O (\vec{F})$)

Bras de levier : comme pour L_Δ , le calcul peut se faire plus simplement

$$|M_\Delta| = \|\vec{F}_P\| d = \|\vec{OM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin \alpha| \quad \text{avec } \alpha = (\widehat{\vec{OM}, \vec{F}})$$

Il existe une autre méthode : pour évaluer $\vec{OM} \times \vec{F}$, on choisit l'axe $OO' // \vec{F}$

On utilise les coordonnées cylindrique avec comme axe des z l'axe OO'

C'est la même chose que $\vec{O'M} \times \vec{F}$ ou $\vec{OM'} \times \vec{F}$, M' étant le projeté de M dans le plan xOy (souvent appelé m dans la base cylindrique)

En effet , on a bien $\vec{OM} \times \vec{F} = (\vec{OM'} + \vec{M'M}) \times \vec{F} = \vec{OM'} \times \vec{F} + \vec{0}$ cqfd , de même $\vec{OM} \times \vec{F} = (\vec{OO'} + \vec{O'M}) \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{O'M} \times \vec{F}$

Par ailleurs , on voit que $r=d$ = bras de levier

$$\|\vec{OM'} \times \vec{F}\| = OM' \cdot F = rF \quad \text{tandis que } \|\vec{OM} \times \vec{F}\| = OM \cdot F \cdot |\sin(\pi/2 + \psi)| = \frac{OM'}{\cos \psi} \cdot F \cdot \cos \psi = OM' \cdot F \quad \text{cqfd}$$

$$\text{et } \vec{OM} \times \vec{F} = O'M \cdot F \cdot \vec{e}_\theta = rF \vec{e}_\theta$$

Ex d'application : dans le repère cartésien (Ox , Oy , Oz) avec Oz vertical ascendant , un point M est soumis à l'action du champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. Déterminer le moment du poids $\vec{M}_O (\vec{P})$. Puis le moment scalaire $M_{Oz} (\vec{P})$. Constatation ?

III. Théorème du moment cinétique (TMC)

1) Enoncé du TMC par rapport à un point fixe

Soit R, un référentiel galiléen, O un point fixe de R et M , un point matériel de masse m subissant la somme des forces $\sum \vec{F}$

, alors la dérivée du moment cinétique de M en O est égale au moment de la somme des forces $\sum \vec{F}$.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O (\sum \vec{F}) \quad \text{noté aussi } \sum \vec{M}_O (\vec{F}) \quad (1)$$

Le TMC est utile pour établir l'équation du mouvement d'un pt matériel en rotation autour d'un axe fixe. En particulier, $\vec{L}_O$ se conserve si les forces appliquées $\sum \vec{F}$ sont colinéaires à $\vec{OM}$

Rq : *il est une csq du PFD

$$* \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O (\vec{F})$$

$$\text{Unités : } \frac{kgm/s}{s} = N \quad \frac{mkgm/s}{s} = N.m$$

2) Démonstration

$$\text{Prérequis : } \frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Ainsi $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{OM})}{dt} \times m \vec{v} + \vec{OM} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \times m \vec{v} + \vec{OM} \times \sum \vec{F}$ d'après de PFD

Soit $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} + \vec{M}_O (\sum \vec{F})$ cqfd

3)Enoncé du TMC par rapport à un axe fixe Δ dans un référentiel galiléen

On s'intéresse ici uniquement à la rotation autour de l'axe fixe $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$.

On applique le TMC en O fixe appartenant à Δ , puis on le multiplie scalairement par $\vec{u}_\Delta$.

On obtient le **théorème du moment cinétique scalaire** par rapport à Δ :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta (\vec{F})$$

Le moment cinétique scalaire se conserve dc si : - la somme des forces appliquées est // à l'axe de rotation ou bien si le prolongement de la somme des forces appliquées passe par l'axe de rotation

Dém : on fait (1). $\vec{u}_\Delta$, pour obtenir : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_\Delta = \sum \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$ soit $\frac{d\vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta}{dt} = \sum (\vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta)$ soit $\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta (\vec{F})$

4)Application : le pendule simple.

Hyp : mvt se faisant dans le plan de figure (ce n'est pas un « pendule spatial »).

On retrouve l'équation du mouvement de manière plus simple ; en effet on élimine l'action de $\vec{T}$ (qui passe par O dc de moment nul)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(m\vec{g}) + \vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{M}_O(m\vec{g})$$

Or $\vec{L}_O = \vec{OM} \times m\vec{v}$, et en coordonnée cylindriques, $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$$\vec{L}_O = (l\vec{e}_r) \times (ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{M}_O(m\vec{g}) = \vec{OM} \times m\vec{g} = (l\vec{e}_r) \times (mg\cos\theta\vec{e}_r - mg\sin\theta\vec{e}_\theta) = 0 - lmgsin\theta\vec{e}_z = -mgd\vec{e}_z$$

(on peut aussi faire le calcul directement avec le bras de levier d)

$$\text{Donc } \frac{d(ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z)}{dt} = -lmgsin\theta\vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \frac{d(ml^2\dot{\theta})}{dt} = -lmgsin\theta \quad \text{soit} \quad l\ddot{\theta} + gsin\theta = 0$$

(on aurait pu aussi écrire $\frac{dL_\Delta}{dt} = M_\Delta(m\vec{g})$)

B)Mécanique des systèmes : principes fondamentaux.

On étend les lois précédentes à un système d'au moins 2 pts matériels.

I)Loi de la quantité de mouvement =théorème de la résultante cinétique=théorème du centre d'inertie.

1)Rappels

Le barycentre G d'un ensemble de points (M_i, m_i) est donné par $\sum_i m_i \vec{GM}_i = \vec{0}$ ou bien, avec O quelconque,

$$\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OM}_i}{\sum_i m_i} \quad (1) \quad \text{Soit } m = \sum_i m_i \text{ la masse totale du système,}$$

Propriété : de (1), on déduit que la quantité de mouvement totale du système $\vec{P} (= \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i) = m\vec{v}_G$

càd que $\vec{P}$ se calcule tout simplement comme si le système se réduisait à son centre de gravité ou barycentre G , en lequel serait concentrée la masse totale.

2) Loi (ou théorème) de la quantité de mouvement(LQM=TCI)

On étend le PFD (2^{ème} loi de Newton à un ensemble de pts matériels)

a)Forces intérieures ou extérieures.

Soit un système S constitué de l'ensemble de pts (M_i , de masse m_i) . on classe les forces auxquelles est soumis le pt particulier M_i en deux groupes :

* Forces intérieures :

Les autres points M_j ($j \neq i$), que M_i exercent sur lui des forces à distance. Soit $\vec{f}_{ji}$, la force qu'exerce M_j sur M_i , Alors la force totale intérieure reçue par M_i est : $\vec{f}_{i,int} = \sum_{j,j \neq i} \vec{f}_{ji}$

La somme de toutes les forces intérieures reçues par ts les pts M_i est

$$\vec{F}_{int} = \sum_i \vec{f}_{i,int} = \sum_i \sum_{j,j \neq i} \vec{f}_{ji}$$

En utilisant le principe de l'action et de la réaction (ou des actions réciproques : $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$) dc dans la somme $\sum_{j,j \neq i} \vec{f}_{ji}$, les termes $\vec{f}_{ij}$ et $\vec{f}_{ji}$ s'annulent 2 à 2 et $\sum_{j,j \neq i} \vec{f}_{ji} = \vec{0}$ donc

$\vec{F}_{int} = \vec{0}$! La somme des forces intérieures à un système est nulle.

* Forces extérieures :

$\vec{F}_{ext}$, la somme des forces extérieures agissant sur chaque pt M_j est $\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{f}_{i,ext}$

b) Enoncé de la Loi (ou théorème) de la quantité de mouvement

On applique le PFD au point M_j dans un référentiel R galiléen :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_{i,int} + \vec{f}_{i,ext} . \text{ pour le système entier , on a donc } \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i (\vec{f}_{i,int} + \vec{f}_{i,ext}) = \vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext} \\ = \vec{F}_{ext} \quad \text{soit } m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{ext} \text{ ou encore } \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_G = \vec{F}_{ext}$$

Dans un réf. galiléen , la dérivée de la quantité de mouvement totale par rapport au temps est égale à la somme de forces extérieures.

On se ramène ainsi à un pb de mécanique du point : on étudie le mvt du point G

*csq :Pour un système isolé (ex :2 étoiles loin des autres en interaction mutuelle) (ou pseudo-isolé , ex : palet glissant sans frottement sur table horizontale) : $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$,
dc $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$: il y a conservation de $\vec{P}$.

*Une application : éclatement d'un système (fusée , arme à feu) ou collision de 2 solides ...

Ex :lancer d'un palet en chute libre :

Ex : Si le système est isolé ou pseudoisolé ...

II) Loi du moment cinétique (pour un système) : LMC

1) Moment cinétique d' un système .

Noté $\vec{L}_O$, autour d'un point O fixe , $\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_O(M_i) = \sum_i (\vec{OM}_i \times m\vec{v}_i)$

2) Moment intérieur et extérieur à un système

De même que pour la résultante des forces intérieures , et en appliquant aussi le principe de l'action et de la réaction , on montre facilement que le moment totale des actions intérieures par rapport à n'importe quel point O fixe est nul , par compensation des termes 2 à 2 .

$$\vec{M}_O, \text{int} = \vec{0}$$

$$\text{et on a } \vec{M}_O, \text{ext} = \sum_i (\vec{OM}_i \times \vec{f}_{i, \text{ext}})$$

3) Couple de forces

En mécanique des systèmes (et spécialement en rotation) , la notion de force est peu adaptée , on va plutôt parler d'action et plus précisément de **couple** .

Ex : pour faire tourner un volant avec ses 2 mains : une main agit en A_1 et exerce la force $\vec{F}_1$, l'autre diamétralement opposée en A_2 et exerce la somme des forces appliquées au volant est nulle si $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ mais le volant est pourtant soumis à une action qui le fait tourner ! Le moment en O de cette action (appelée couple car la force résultante est nulle) est :

$$\vec{M}_O = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{OA}_2 \times \vec{F}_1 = \vec{A_1A_2} \times \vec{F}_1 = 2F_1 d \vec{e}_z , d \text{ étant le bras de levier de chaque force.}$$

Rq : on peut faire tourner le volant de la même façon en agissant avec la main droite (module de la force $2F_1$) ; le volant subira aussi un couple , le même couple seulement l'action de la réaction de l'axe sur le volant correspond à une force opposée à celle de la main gauche , mais de moment nul)

CCI : un couple ne déplace pas le G d'un système mais met ce système en rotation

Par ailleurs , $\vec{M}_O$ ne dépend pas du point O choisi dc on peut le noter $\vec{M}_O = \vec{C}$ (couple).

4) LMC pour les systèmes.

On part de $\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_O(M_i) = \sum_i (\vec{OM}_i \times m\vec{v}_i)$ et on utilise le TMC en O pour chaque point M_i dans le référentiel R galiléen $\frac{d\vec{L}_O(M_i)}{dt} = \vec{OM}_i \times (\vec{f}_{i, \text{int}} + \vec{f}_{i, \text{ext}})$ dc , en sommant : $\sum_i (\frac{d\vec{L}_O(M_i)}{dt}) = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$
 $= \sum_i (\vec{OM}_i \times \vec{f}_{i, \text{int}}) + \sum_i (\vec{OM}_i \times \vec{f}_{i, \text{ext}}) = \vec{M}_O, \text{int} + \vec{M}_O, \text{ext} = \vec{M}_O, \text{ext}$

La LMC s'énonce ainsi : Par rapport à un réf. galiléen , O étant un point fixe , la dérivée du moment cinétique du système est égale à la somme des moments des forces (ou actions) extérieures :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O, \text{ext}$$

Rq : Quelque soit O , cette loi fondamentale est valable , elle traduit l'isotropie de l'espace (toutes les directions de l'espace sont équivalentes dans cette loi physique)

Loi du moment cinétique scalaire par rapport à un axe fixe

Avec $\Delta(O, \vec{u}_\Delta)$, $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$ LMC : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O, ext$ que l'on multiplie scalairement par $\vec{u}_\Delta$: $\frac{dL_O}{dt} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{M}_O, ext \cdot \vec{u}_\Delta$ soit : $\frac{dL_\Delta}{dt} = M_{\Delta, ext}$

II) Énergétique des systèmes.

1) Énergie cinétique

On a un ensemble de points ($M_i, m_i, \vec{v}_i$), $E_C = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right)$

2) Énergie potentielle de pesanteur

$$E_{p,p} = \sum_i (m_i g z_i) + K \quad \text{or} \quad m \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OM}_i \quad \text{et} \quad m = \sum_i m_i$$

En projetant sur $\vec{e}_z$: $m z_G = \sum_i m_i z_i$ dc $E_{p,p} = m g z_G + K$

C'est l'énergie potentielle de pesanteur du point G affecté de la masse totale du système.

3) Travail et puissance des actions intérieures.

Soit le point M_i quelconque, d'un système quelconque, il subit l'action : $\vec{f}_i = \vec{f}_{i,int} + \vec{f}_{i,ext}$

Pour un déplacement élémentaire de ce point $d\vec{r}_i$ pendant dt , le travail élémentaire total reçu est :

$\delta W_i = \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i$ et le travail total reçu par le système pendant dt (les M_i se déplaçant d'un vecteur $d\vec{r}_i$ différent) est :

$$\delta W = \sum_i \delta W_i = \sum_i (\vec{f}_{i,int} + \vec{f}_{i,ext}) \cdot d\vec{r}_i \quad \text{pdt} \quad dt$$

et la puissance totale reçue est $P = \frac{\delta W}{dt} = \sum_i (\vec{f}_{i,int} + \vec{f}_{i,ext}) \cdot \vec{v}_i$ avec $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

On peut écrire $P = P_{int} + P_{ext}$ en scindant dans P la puissance des actions intérieures et celle des actions extérieures

Attention (à la différence de la somme des forces ou de la somme des moments intérieur (e)s), $P_{int} \neq 0$ sauf pour un solide indéformable.

En effet $P_{int} = \sum_i (\vec{f}_{i,int} \cdot \vec{v}_i) = \sum_i \sum_{i \neq j} (\vec{f}_{j,i} \cdot \vec{v}_i)$ en notant $\vec{f}_{j,i}$ l'action qu'exerce M_j sur M_i .

La puissance de l'interaction entre M_i et M_j est la puissance reçue par M_i plus celle reçue par M_j soit

$$P_{ij} = \vec{f}_{j,i} \cdot \vec{v}_i + \vec{f}_{i,j} \cdot \vec{v}_j = \vec{f}_{i,j} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \quad \text{comme} \quad \vec{f}_{j,i} = -\vec{f}_{i,j}, \quad \text{donc} \quad P_{ij} = \vec{f}_{i,j} \cdot \frac{d\vec{M}_i \vec{M}_j}{dt} = f_{i,j} \cdot \frac{dM_i M_j}{dt} \quad \text{car} \quad \vec{M}_i \vec{M}_j // \vec{f}_{i,j} \quad \text{avec} \quad f_{i,j} \text{ la projection de } \vec{f}_{i,j} \text{ sur l'axe orienté de } M_i \text{ vers } M_j \quad (\vec{f}_{i,j} = f_{i,j} \cdot \vec{u}_{ij})$$

Dc $P_{int} = \sum_i (P_{ij})$ n'est pas nulle à priori si $\frac{dM_i M_j}{dt}$ non nul c-à-d si le système est déformable.

La puissance des actions intérieures est liée aux déformations du système

4) Théorèmes énergétiques pour les systèmes.

*Th. de l'Ec et Th. de la puissance cinétique

Pour le point M_i : $\frac{dE_C}{dt} = P_{i,int} + P_{i,ext}$ Pour le système : $\frac{dE_C}{dt} = P_{int} + P_{ext}$ et $\Delta E_C = W_{int} + W_{ext}$

Donc a on les 2 cas : - solide indéformable : ttes les puissances des forces intérieures s'annulent 2 à 2 : $P_{int}=0$ $W_{int}=0$
-système déformable : P_{int} et W_{int} non nuls.

Ex :Système { masses + ressort comprimé }

ou : freinage d'une voiture

*Th. de l'Em et de la puissance mécanique.

$\Delta E_m = W(\vec{f}_{nc}) = W(\vec{f}_{nc,int}) + W(\vec{f}_{nc,ext})$ et $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc,int} + P_{nc,ext}$

$(W(\vec{f}_{nc,int}))=0$ et $P_{nc,int}=0$ si solide indéformable)

C.Solides en rotation autour d'un axe fixe

I)Les théorèmes de la dynamique du solide

LQM : $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_G = \vec{F}_{ext}$ et LMC scalaire : $\frac{dL_\Delta}{dt} = M_{\Delta,ext}$

II)Cas particulier de la rotation autour d'un axe fixe

1)Expression simplifiée du moment cinétique scalaire d'un solide autour d'un axe , moment d'inertie J_Δ

Soit le solide en rotation autour de l'axe $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ à vitesse angulaire ω (algébrique). Chaque point M_i décrit donc un cercle de rayon r_i à vitesse angulaire ω .

$r_i = H_i M_i$ avec H_i le projeté de M_i sur Δ .

Le moment cinétique scalaire de M_i par rapport à Δ est :

$L_\Delta(M_i) = \pm H_i M_i m_i v_i$ avec $v_i = \|\vec{v}_i\|$ soit , comme $v_i = r_i |\omega|$,

$L_\Delta(M_i) = \pm H_i M_i m_i r_i^2 |\omega| = m_i r_i^2 \omega$ (le signe étant donné par la règle de la main droite selon le sens de rotation du solide par rapport à l'axe Δ orienté)

On peut aussi établir ce résultat en utilisant le repère cylindrique local $(H_i, \vec{e}_r$

, $\vec{e}_\theta, \vec{u}_\Delta = \vec{e}_z$) $\vec{v}_i = r_i \omega \vec{e}_\theta$ et $\vec{OM}_i = r_i \vec{e}_r + z_i \vec{u}_\Delta$ dc $\vec{L}_O(M_i) = \vec{OM}_i \times (m_i \vec{v}_i) = (r_i \vec{e}_r + z_i \vec{u}_\Delta) \times (m_i r_i \omega \vec{e}_\theta) = m_i r_i^2 \omega \vec{u}_\Delta - m_i r_i z_i \omega \vec{e}_r$ et donc en faisant (. $\vec{u}_\Delta$) :

$$L_{\Delta}(M_i) = m_i r_i^2 \omega$$

Puis en sommant sur tous les points M_i : $L_{\Delta} = \sum_i (L_{\Delta}(M_i)) = \sum_i (m_i r_i^2 \omega) = \sum_i (m_i r_i^2) \omega = J_{\Delta} \cdot \omega$

Avec $J_{\Delta} = \sum_i (m_i r_i^2)$ le moment d'inertie du solide autour de Δ

$$L_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \omega$$

Rq : pour un solide continu

, J_{Δ} est donné par le calcul intégral : J_{Δ}

$$= \iiint_V r^2 dm$$

$$= \iiint_V r^2 \rho dv$$

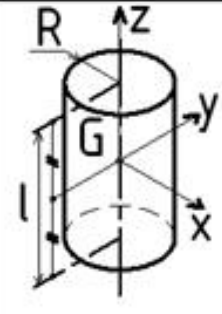
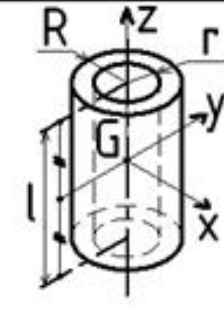
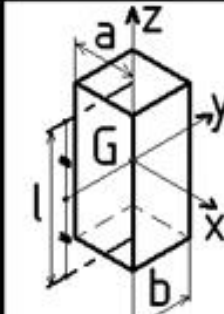
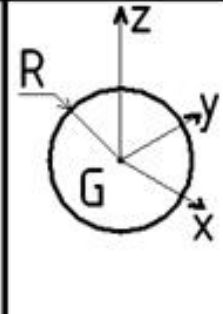
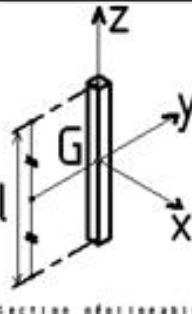
si ρ est uniforme.

Unité de

$$J_{\Delta} : \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

J_{Δ} est caractéristique du solide, il tient compte de la vitesse

de chaque point et de son éloignement à l'axe ; ex de calcul, pour un cylindre homogène de masse m et rayon R , $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m R^2$

CYLINDRE	TUBE	PARALLELEPIPEDE RECTANGLE	SPHERE	TIGE
				
$I_{gx} = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot l^2}{12}$	$I_{gx} = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m \cdot l^2}{12}$	$I_{gx} = \frac{m \cdot (b^2 + l^2)}{12}$	$I_{gx} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$	$I_{gx} = \frac{m \cdot l^2}{12}$
$I_{gy} = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot l^2}{12}$	$I_{gy} = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m \cdot l^2}{12}$	$I_{gy} = \frac{m \cdot (a^2 + l^2)}{12}$	$I_{gy} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$	$I_{gy} = \frac{m \cdot l^2}{12}$
$I_{gz} = \frac{m \cdot R^2}{2}$	$I_{gz} = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{2}$	$I_{gz} = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{12}$	$I_{gz} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$	$I_{gz} \approx 0$

2) LMC scalaire pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

La LMC scalaire $\frac{dL_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}}$ devient ici, avec $L_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \omega$:

$$\frac{d(J_{\Delta} \omega)}{dt} = J_{\Delta} \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}} \quad \text{donc} \quad J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}} \quad \text{ou encore} \quad J_{\Delta} \ddot{\theta} = M_{\Delta, \text{ext}}$$

Rq : analogie formelle avec $m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$ $J_{\Delta} \leftrightarrow m$ $\omega \leftrightarrow \vec{v}_G$ et $M_{\Delta, \text{ext}} \leftrightarrow \vec{F}_{\text{ext}}$

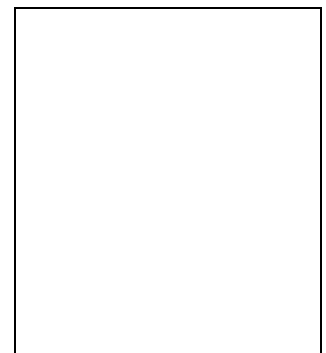
C'est le théorème à appliquer pour une rotation autour d'un axe fixe, car, à la différence de la LQM, il ne fait pas intervenir les actions des liaisons avec l'axe.

3) Liaison pivot et pivot parfait

- liaison pivot : à un seul degré de liberté

- pivot parfait : pivot sans frottements, le moment de ses actions $\vec{f}$ est nul !

$$M_{\Delta, \text{liaison}} = 0$$



4) Application : le pendule PESANT.

Solide homogène (tige par ex) en liaison pivot parfait autour d'un axe Δ .

La position de la tige est repérée uniquement par l'angle θ . Supposons qu'on la lâche sans vitesse initiale dans une position écartée de sa position d'équilibre $\theta=0$, elle va effectuer des oscillations.

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = M_{\Delta, \text{ext}} = M_{\Delta, \text{poids}} + M_{\Delta, \text{pivot}} = M_{\Delta, \text{poids}} = \pm dmgl$$

d étant le bras de levier, - si $\theta > 0$ et + si $\theta < 0$ (cf définition et orientation de θ ainsi que de l'axe Δ par le vecteur $\vec{u}_{\Delta}$)

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = -\frac{l}{2} \sin \theta . mg \quad \text{soit } J_{\Delta} \ddot{\theta} + \frac{mgl}{2} \sin \theta = 0 \quad (1) \text{ qui est l'équation}$$

différentielle en $\theta(t)$ du mouvement (noter l'analogie avec le pendule simple : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$)

Pour les petits angles, on a un O.H. de pulsation ω_0 telle que $\omega_0^2 = \frac{mgl}{2J_{\Delta}}$

Comme pour le pendule simple :

*(1) étant non linéaire-> non isochronisme des oscillations

*Intégrale 1^{ère} du mvt : on multiplie (1) par $\dot{\theta}$: $J_{\Delta} \ddot{\theta} \dot{\theta} + \frac{mgl}{2} \dot{\theta} \sin \theta = 0$ soit $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 \right) - \frac{mgl}{2} \frac{d}{dt} (\cos \theta) = 0$
soit $\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 - \frac{mgl}{2} \cos \theta = \text{cste}$

III)Energétique

*De manière générale pour un solide indéformable : $\frac{dE_C}{dt} = P_{\text{ext}}$; $\Delta E_C = W_{\text{ext}}$; $\Delta E_m = W(\vec{f}_{nc, \text{ext}})$
et $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc, \text{ext}}$

*Ici, pour la rotation autour d'un axe fixe, $E_C = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i r_i^2 \right) \omega^2$

Soit $E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$ (cf l'analogie formelle là encore avec $E_C = \frac{1}{2} m v^2$ pour la translation)

*La LMC scalaire : $J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}}$

Multiplions cette égalité par ω , comme pour l'intégrer, on obtient :

$J_{\Delta} \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}} \cdot \omega$ soit $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 \right) = \frac{dE_C}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}} \cdot \omega$, par comparaison avec $\frac{dE_C}{dt} = P_{\text{ext}}$, il vient

$$P_{\text{ext}} = M_{\Delta, \text{ext}} \cdot \omega$$

En particulier la puissance d'un couple C : $P_{\text{ext}} = C \cdot \omega$